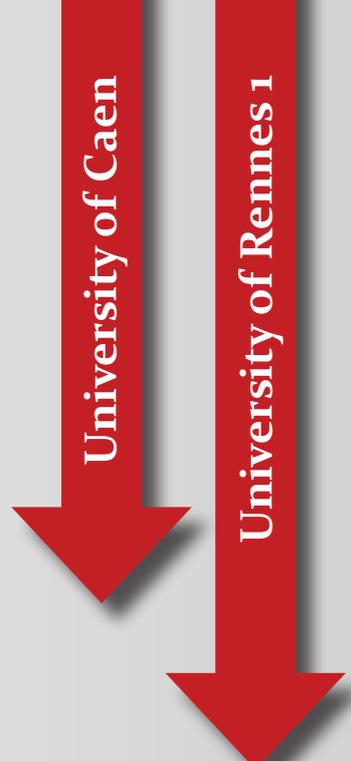




Centre de Recherche en Économie et Management  
*Center for Research in Economics and Management*



## **Jeux de congestion finis à choix unique : Théorie, Equilibres, Applications -Calculs et Complexités-**

**Samir Sbabou**

*University of Caen Basse-Normandie - CREM UMR CNRS 6211*

**Hatem Smaoui**

*CEMOI, Université de la Réunion*

**Abderrahmane Ziad**

*University of Caen Basse-Normandie - CREM UMR CNRS 6211*

January 2013 - WP 2013-03

# **Working Paper**

UNIVERSITÉ DE CAEN/BASSE-NORMANDIE  
U.F.R. : Sciences Économiques et Gestion  
Centre De Recherche En Économie Et Management (CREM), CNRS  
UMR6211

---

## Document De Travail

**Jeux de congestion finis à choix unique : Théorie,  
Equilibres, Applications  
-Calculs et Complexités-**

**Finite congestion games with unique choice : Theory,  
Equilibrium, Applications  
-Computations and Complexity-**

**Samir Sbabou, Hatem Smaoui, Abderrahmane Ziad.<sup>1</sup>**

---

### **MOTS-CLÉS :**

Jeux de congestion, Jeux de potentiel, Fonction de potentiel, Équilibre de Nash, Symétrie, Non symétrie, Choix unique, Réseau, Allocation de tâches, Voie d'amélioration, FIP.

---

1. Samir Sbabou, (Université de Caen Basse Normandie), samir.sbabou@gmail.com. Hatem SMAOUI, (CEMOI, Université de la Réunion), hsmoai@univ-reunion.fr. Abderrahmane ZIAD, (CREM, Université de Caen Basse Normandie), abderrahmane.ziad@unicaen.fr.

---

**KEYWORDS :**

Congestion games, Potential games, Potential function, Nash equilibrium, Symmetric, Non symmetric, Singleton, Network, Allocation task. Improvement path, FIP.

**JEL classification :** C72

---

---

**Résumé :**

La première partie propose une revue de littérature sur les jeux de congestions et les jeux de potentiel exact. La deuxième partie traite les jeux de congestion à choix unique dans le cas symétrique et propose une formule simple et pratique permettant de trouver l'ensemble de tous les équilibres de Nash. La troisième partie analyse la famille des jeux de congestion à choix unique non symétriques. Ici l'effet de congestion n'est pas le même sur l'ensemble des joueurs. Lorsqu'il existe seulement deux ressources ou lorsque la partition est exacte (), une preuve constructive est présentée et permet de calculer plus facilement (au moins) un équilibre de Nash, sans faire appel ni aux fonctions de potentiel (Rosenthal, 1973), ni aux mécanismes d'amélioration (Milchtaich, 1996). Enfin, nous examinons la possibilité d'exploiter nos résultats dans certaines applications des jeux de congestion telles que les jeux de congestion réseau et les jeux d'allocation de tâches.

---

**Abstract :**

The first part reviews the literature of congestions games and games with exact potential. We study in second part the singleton congestion symmetric games and propose a simple and practical formula which permits to describe the set of all Nash equilibria. The third part analysis the family of the non symmetric singleton congestion games. The congestion effect is not the same for all players. When there exist only two resources or when the partition is said to be unique (), we present a constructive proof to compute more easily (at least) a Nash equilibrium, without using either the potential function (Rosenthal, 1973), or the improvement mechanism (Milchtaich, 1996). Finally, we examine the possibility to exploit our results in certain congestion games' applications such as the network congestion games and the allocation of tasks.

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Jeux de congestion et jeux de potentiel : Résultats connus</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Jeux de congestion . . . . .	13
1.2.1 Jeux de congestion standard . . . . .	13
1.2.2 Jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques . . . . .	15
1.2.3 Jeux de congestion à choix unique . . . . .	18
1.3 Jeux de potentiel . . . . .	20
1.3.1 Jeux de potentiel exact . . . . .	20
1.3.2 Fonction de potentiel pondéré . . . . .	23
1.3.3 Fonction de potentiel ordinal . . . . .	23
1.3.4 Fonction de potentiel ordinal généralisé . . . . .	24
1.3.5 Les équilibres dans les jeux de potentiel . . . . .	25
1.4 Jeux de congestion et équilibre de Nash . . . . .	29
1.4.1 Jeux de congestion standard, fonction de potentiel et équilibre de Nash . . . . .	29
1.4.2 Jeux de congestion à choix unique et voie d'amélioration	35
1.5 Complexité des jeux de congestion . . . . .	36

1.6	Conclusion . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique :</b>	
	<b>le cas symétrique</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	40
2.2	Équilibres dans un jeu de congestion à choix unique symétrique	41
2.2.1	Passage du contexte cardinal au contexte ordinal . . .	41
2.2.2	Profils de stratégies et vecteurs de congestion . . . . .	44
2.2.3	Équilibre de Nash et fonction de potentiel . . . . .	46
2.2.4	Équilibre de Nash et voie d'amélioration finie : Méthode de Milchtaich . . . . .	46
2.3	Résultats : une formule pour décrire tous les équilibres de Nash	52
2.3.1	Description de tous les équilibres de Nash . . . . .	53
2.3.2	Algorithme et complexité : jeu de congestion à choix unique symétrique . . . . .	57
2.4	Conclusion . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique :</b>	
	<b>le cas non symétrique</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Cas non symétrique . . . . .	68
3.2.1	Cas de deux stratégies . . . . .	69
3.2.2	Jeux sans la propriété d'amélioration finie . . . . .	71
3.3	Existence d'un équilibre de Nash dans les jeux de congestion .	74
3.4	Résultats : Nouvelles preuves et description des équilibres de Nash . . . . .	80
3.4.1	Le cas de deux ressources ( $m = 2$ ) . . . . .	81

3.4.2	Les jeux de congestion avec partition exacte . . . . .	90
3.4.3	Un cas particulier de jeux de congestion avec partition non exacte . . . . .	101
3.4.4	Le cas général . . . . .	104
3.5	Conclusion . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Applications des jeux de congestion</b>	<b>114</b>
4.1	Introduction . . . . .	114
4.2	Intérêt des jeux de congestion . . . . .	115
4.3	Jeux de réseau . . . . .	116
4.3.1	Application : Jeu de réseau, points de départ et d'arrivée identiques . . . . .	117
4.3.2	Application : Jeu de réseau, points de départ différents et points d'arrivée identiques . . . . .	124
4.4	Allocation des tâches . . . . .	127
4.5	Application à l'allocation des tâches avec des machines différentes	131
4.5.1	Tâches identiques et machines différentes . . . . .	131
4.5.2	Tâches différentes et machines différentes . . . . .	133
4.6	Prix de l'anarchie . . . . .	134
4.6.1	Modèle de Pigou . . . . .	135
4.6.2	Modèle de paradoxe de Braess . . . . .	138
4.7	Conclusion . . . . .	141
	<b>Conclusion générale</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>

# Introduction générale

Depuis l'apparition de "*Theory of Games and Economic Behavior*" de J. V. Neumann et Morgenstern (1944), la théorie des jeux est utilisée dans plusieurs disciplines : l'économie [52], la biologie (les jeux évolutifs définis par Maynard Smith [71, 72]), la finance [4], la gestion des transports [53, 76], le marketing [33], les sciences politiques et sociales [48], l'écologie, l'environnement et bien d'autres domaines. La théorie des jeux non coopératifs étudie les interactions stratégiques entre les joueurs. Ces joueurs sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions (stratégies) possibles et dans un cadre défini à l'avance fixé par une règle du jeu. Le résultat de ces choix constitue une issue du jeu à laquelle est associée un gain (ou une perte) pour chacun des participants. Dans ce cadre, plusieurs concepts de solution peuvent être envisagés en fonction du type de jeu étudié. L'équilibre de Nash, notion proposée en 1950 par le mathématicien John Nash [49], est certainement le concept de solution le plus connu : il s'agit d'un état dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie étant données les stratégies adoptées par les autres joueurs. On dit aussi que les déviations unilatérales ne sont pas profitables.

Dans ce travail, nous nous intéressons à deux types particuliers de jeux non coopératifs finis [52] : la famille des jeux de congestion et la famille des jeux de

potentiel. L'étude des jeux de congestion est actuellement en pleine expansion dans la littérature universitaire, grâce notamment à Rosenthal [57], qui fut le premier à la décrire. Ce sont des jeux qui vérifient les axiomes suivants : (NS) (L'utilité d'un joueur dépend de son choix et de la sous-population des joueurs qui ont fait le même choix), (A) (Anonymat, Seule la taille du groupe importe), (C) (Externalité Sociale Négative = Congestion). Pour donner un exemple concret des situations modélisables par un jeu de congestion citons le problème que rencontre un groupe de personnes identiques (même qualifications) sans emploi qui doit décider d'immigrer pour trouver un travail. Leur attirance pour différents pays dépend des conditions du marché du travail dans chaque pays. Si trop d'individus décident d'immigrer dans un même pays, cela va réduire la demande de main d'oeuvre vers ce pays.

Rosenthal [57] a prouvé l'existence de l'équilibre de Nash dans les jeux de congestion fini en utilisant une preuve élémentaire et courte (tenant en une demi page). Depuis Rosenthal [57] est devenu une référence incontournable dans cette littérature avec plus de mille citations dans différents articles traitant de ce sujet. Monderer et Shapley [47] ont généralisé les jeux de congestion à une classe appelée "jeux de potentiel". Il s'agit là de jeux où des informations concernant l'équilibre de Nash peuvent être intégrées en une seule fonction (dite "le potentiel"). Les déviations de tous les joueurs sont alors mesurées par cette fonction, appelée le "potentiel".

D'autres généralisations sont établies dans la littérature, Konishi, Le Breton et Weber [35], Quint et Shubik [56], puis Milchtaich [41]. Dans ces cas les jeux de congestion considérés n'admettent pas une fonction de potentiel en général, mais ils sont susceptibles d'admettre un équilibre de Nash en stratégies

pures. Dans ces modèles, l'existence d'un équilibre de Nash est généralement établie par la convergence d'un processus d'améliorations successives appelé mécanisme de Nash. Ce processus tend à améliorer un profil de stratégies en autorisant les joueurs à intervenir les uns après les autres, jusqu'à arriver à un profil où aucun des joueurs ne peut améliorer son utilité, i.e., donc un équilibre de Nash est obtenu. Le temps de convergence de ce processus est à l'origine de nombreux travaux de recherche (voir par exemple [[1], [31],[41]]).

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de classes particulières de jeux de congestion. Jeong et *al* [31] ont considéré la catégorie des jeux de congestion à choix unique où chaque joueur ne peut choisir qu'une seule ressource, et non pas plusieurs à la fois. Ils ont montré que le processus d'amélioration converge vers un équilibre en un temps polynomial. Ils ont aussi prouvé que ce résultat est valable pour la recherche des équilibres optimaux (équilibres de Nash qui maximisent la somme des utilités des joueurs). Holzman et Law-Yone [30] et Voorneveld et *al* [75] ont étudié l'ensemble des équilibres de Nash forts dans les jeux de congestion à choix unique monotones. L'équilibre de Nash fort est un profil pour lequel aucun sous-ensemble de joueurs ne peut obtenir des gains plus élevés en changeant chacun sa propre stratégie. Il s'avère que, dans le cas des jeux à choix unique monotones, l'ensemble des équilibres forts coïncide avec l'ensemble des équilibres de Nash ainsi qu'avec l'ensemble des profils qui maximisent le potentiel. Des variantes de jeux de congestion à choix unique monotones ont été étudiées en terme de temps de convergence de la dynamique de la meilleure réponse vers un équilibre de Nash (Even-Dar et *al* [21]), et en terme d'existence d'un concept de solution alternative (Rozenfeld et Tennenholtz [62]).

Ces jeux de congestion réseau, constituent une autre classe importante de jeux de congestion. Ils représentent les problématiques d'encombrement de réseaux routiers, constitués de  $n$  voyageurs et  $m$  liaisons (routes). Koutsoupias et Papadimitriou [38] se sont intéressés à cette ligne de recherche et ont été suivis plus tard par Czumaj et Vöcking [18], Czumaj, Krysta et Vöcking [17], Mavronicolas et Spirakis [39], Koutsoupias, Mavronicolas et Spirakis [37], parmi beaucoup d'autres. Leur objectif a porté essentiellement sur le calcul du prix de l'anarchie pour les équilibres de Nash en stratégies pures. Le prix de l'anarchie a été défini à l'origine par Koutsoupias et Papadimitriou [38] pour capturer l'idée du pire des cas de rendement égoïstes (par rapport à la situation d'un équilibre optimal) d'un jeu où les joueurs sont en concurrence pour les liaisons des réseaux.

Ackermann et *al* [3] ont étendu la version originale des jeux de congestion (celle décrite par Rosenthal), à la famille des jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques : chaque joueur possède ses propres fonctions de paiement est donc sa propre fonction d'utilité. Ce qui se produit par exemple lors d'un embouteillage sur le périphérique de Paris, qu'un automobiliste n'arrête pas de klaxonner, qu'un autre fume cigarette sur cigarette et qu'un dernier souriant écoute une émission radio. Les auteurs ont démontré que ce type de jeux n'admet pas nécessairement un équilibre de Nash. Cependant, Milchtaich [41] a démontré qu'il existe toujours (au moins) un équilibre de Nash dans les jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques, lorsque chaque joueur est restreint à ne sélectionner qu'un seul bien (choix unique) et lorsque les fonctions de paiement sont décroissantes en fonction du nombre de joueurs.

Contrairement à la preuve proposée par Rosenthal, le résultat de Milchtaich n'utilise pas le concept de fonction de potentiel, mais utilise plutôt une variante du mécanisme d'amélioration.

Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement aux travaux de Rosenthal et de Milchtaich. Nous focalisons notre attention, dans un premier temps, sur les jeux de congestion fini à choix unique, avec une fonction d'utilité commune ou avec des fonctions de paiement spécifiques. Nous orientons notre recherche essentiellement vers les questions suivantes : est-il possible d'établir l'existence d'un équilibre de Nash, dans ce type de jeux, par des preuves directes et constructives, sans faire appel ni à la notion de fonction de potentiel ni à l'idée de convergence du processus d'amélioration ? Plutôt que de se restreindre à la recherche d'un seul équilibre, peut-on déterminer l'ensemble des équilibres de Nash, étudier la structure de cet ensemble et établir la liste exacte de tous les équilibres ? Pour quels types de jeux de congestion peut-on réduire le temps de calcul d'un ou de plusieurs équilibres ? C'est à ces questions que nous consacrons l'essentiel de notre travail. Dans le premier chapitre (contenant des résultats connus), nous nous intéresserons particulièrement à la présentation des différentes classes de jeux de congestion : les jeux de congestion standards, les jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques et les jeux de congestion à choix unique. Nous présenterons par la suite la famille des jeux de potentiel, discutons de l'existence de l'équilibre de Nash et des relations entre les jeux de congestion et les jeux de potentiel. Nous introduisons aussi le concept de complexité de temps de calcul des équilibres de Nash dans les jeux de congestion.

Nos travaux actuels et les résultats déjà obtenus commencent à partir du

chapitre 2. Ce deuxième chapitre sera consacré à l'étude des jeux de congestion symétriques à choix unique (lorsque tous les joueurs ont la même fonction d'utilité). Après une présentation des principales étapes de la méthode de Milchtaich [41] pour trouver un équilibre de Nash, nous procéderons à une analyse des limites de cette méthode fondée sur la propriété d'amélioration finie (finite improvement property (FIP))<sup>2</sup>. Nous examinerons alors la possibilité d'adopter une approche alternative qui conduit à la description totale des équilibres. L'idée est alors d'exploiter cette approche pour construire un algorithme permettant de réduire le temps de calcul d'au moins un équilibre de Nash. Les résultats obtenus sont basés sur une idée simple : Au lieu de considérer une approche cardinale des utilités, l'utilisation d'une approche ordinale des utilités permet de simplifier l'analyse de ce type de jeux. Nous avons pu restreindre la recherche des équilibres de Nash aux dernier termes de l'ordre ou du préordre représentant la fonction d'utilité de chacun des joueurs. Dans le cas symétrique, cette restriction est importante pour deux raisons. D'un côté, elle conduit à une preuve très simple de l'existence des équilibres de Nash sans faire appel ni à la fonction de potentiel et ni à la FIP (Finite Improvement Path). D'un autre côté, elle rend la description totalement indépendante du nombre des ressources mises à la disposition des joueurs. En effet, la formule obtenue, ne faisant intervenir que les  $n$  derniers termes de l'ordre de préférence, elle s'applique aussi facilement à des situations simples (avec un nombre réduit de ressources) qu'à des configurations plus complexes impliquant un très grand nombre de biens.

---

2. Une amélioration est un passage d'un état à un autre en changeant la stratégie d'un seul individu afin d'augmenter son utilité. Un jeu possède la propriété d'amélioration finie (FIP) si toute séquence d'améliorations successives est finie. Il est clair que tout jeu qui vérifie cette propriété admet nécessairement un équilibre de Nash (l'état final d'une chaîne maximale d'améliorations)

Nous poursuivrons notre analyse, dans le troisième chapitre, avec la présentation des jeux de congestion à choix unique non symétriques où les joueurs ne peuvent toujours choisir qu'une seule ressource, mais ne partagent pas (nécessairement) la même fonction d'utilité. Nous donnerons une brève description de la preuve (et de la méthode) de Milchtaich [41] dans ce cas, basée sur la propriété d'amélioration finie avec meilleure réponse ("finite best-reply property" (FBRP))<sup>3</sup>. Là encore, nous pointerons les limites de cette approche lorsqu'on se fixe comme objectif l'identification de tous les équilibres d'un jeu donné. Nous examinerons alors la possibilité d'atteindre cet objectif dans le cas simple où l'ensemble des ressources est réduit à deux éléments. Nous essaierons ensuite d'étendre cette démarche à d'autres sous-classes (les plus larges possibles) de jeux de congestion à choix non symétriques.

Enfin, nous présenterons dans le dernier chapitre, quelques applications de jeux de congestion : les jeux de congestion réseau et les jeux d'allocation de tâches. Nous tenterons d'appliquer les différents résultats que nous avons obtenus à certains concepts relatifs à ces jeux, tels que l'équilibre de Nash, l'équilibre optimal et le prix de l'anarchie.

Dans le futur nous essaierons d'étudier les jeux de congestions dans un cadre général, avec des choix multi-ressources et/ou avec des fonctions coûts non nécessairement identiques.

---

3. FBRP : c'est la même propriété que la FIP, sauf qu'à chaque amélioration, le joueur qui change de stratégie, dévie vers sa meilleure réponse.

# Chapitre 1

## Jeux de congestion et jeux de potentiel : Résultats connus

Ce chapitre sera consacré essentiellement à deux classes particulières de jeux non coopératifs pour lesquelles il existe toujours un équilibre de Nash. La première classe est celle du jeu de congestion, introduite par Rosenthal [57]. La seconde est connue dans la littérature sous le nom de jeu de potentiel, et a été définie par Monderer et Shapely [47]. Après avoir donné les définitions, notations et description de ces jeux, nous discuterons de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures et nous présenterons les relations qui peuvent exister entre ces deux catégories de jeux. Pour finir, nous introduirons la notion de complexité de temps de calcul. Cette notion sera utile pour étudier les jeux de congestion d'un point de vue algorithmique (temps de calcul nécessaire à un algorithme pour converger vers un équilibre).

### 1.1 Introduction

Il y a eu un intérêt grandissant pour l'étude de classes spécifiques de jeux non coopératifs pour lesquelles il existe un équilibre de Nash en stratégies

pures. Dans un modèle de congestion, les joueurs utilisent plusieurs services, également appelés "machines" ou "facteurs primaires issus d'une source commune". Les coûts ou bénéfices qu'un joueur obtient en utilisant un service sont éventuellement parmi d'autres facteurs, déterminés par le nombre d'utilisateurs de ce même service.

En économie, plusieurs problèmes sont étudiés dans les brochures concernant les biens publics à un niveau local où il est commun de parler de "Regroupement Anonyme" (Wooders, 1989) [77] pour décrire la conséquence négative venant de la présence de plus d'un utilisateur du même service. Par exemple, le problème que rencontre un groupe de personnes sans emploi qui doit décider d'immigrer pour trouver un travail. Leur attirance pour différents pays dépend des conditions du marché du travail dans chaque pays. D'un autre côté, si trop d'individus décident d'immigrer dans un même pays, cela réduit l'appel d'immigration vers ce pays.

Rosenthal [57], dans un article très court, peut être considéré comme le fondateur du modèle théorique des jeux de congestion. Selon son modèle, chaque joueur choisit un sous-ensemble de services. Le bénéfice associé à chaque service est une fonction qui ne dépend que du nombre de joueurs qui l'utilisent. L'utilité d'un joueur est la somme des bénéfices associés à chaque service dans le choix de sa stratégie par rapport aux choix des autres joueurs.

Monderer et Shapely [47] définissent la classe des jeux de potentiel, des jeux où certaines informations concernant l'équilibre de Nash peuvent être intégrées à une fonction (dite de potentiel), les déviations unilatérales sont exprimés par le biais d'une seule fonction (indépendante de l'identité du déviant), cette fonction est appelé le potentiel. Le profil de stratégies maximisant le potentiel correspondent alors aux équilibres de Nash du jeu.

Konishi, Le Breton et Weber [35], Milchtaich [41], puis Quint et Shubik [56] considèrent différents types de jeux de congestion n'admettant pas en général une fonction de potentiel, mais peuvent admettre un équilibre de Nash en stratégies pures.

## 1.2 Jeux de congestion

L'objectif dans cette section est la présentation des différents types de jeux de congestion, à savoir : les jeux de congestion standard, les jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques et les jeux de congestion à choix unique avec des fonctions de paiements spécifiques. Notons toutefois l'existence d'une large famille de jeux de congestion qui ne seront pas traités dans ce travail : les jeux de congestion pondérés, les jeux de congestion matroïde (H. Ackermann et *al*) [3], sauf les jeux de congestion réseau qui seront traités dans le chapitre 4.<sup>1</sup>

### 1.2.1 Jeux de congestion standard

L'étude des jeux de congestion est actuellement en plein essor dans plusieurs domaines de recherche (économie, informatique, mathématiques appliqués ...), et de multiples définitions existent quant à la façon de les formuler. Le concept que nous présentons ici est basé sur le modèle de Rosenthal [57], qui fut le premier à analyser ce type de jeux. Les jeux de congestion prennent la forme de jeux non coopératifs [52] ; les joueurs ne peuvent donc pas participer au comportement coopératif. En d'autres termes, les joueurs n'ont pas l'option

---

1. Pour une revue littéraire sur les différentes familles de jeux de congestion, nous vous renvoyons l'article de H. Ackermann et *al* et celui de Milchtaich [41]

de planification avant de choisir ensemble leurs actions. Plusieurs problèmes réels peuvent être modélisés en tant que jeux non coopératifs. De tels jeux ont été étudiés de manière intensive à partir du travail de Nash [51].

En général, les jeux de congestion sont définis comme suit :

**Définition 1.1.** Un *jeu de congestion standard*  $G(N, R, (X_i)_{i \in N}, (d_r)_{r \in R})$  est un jeu non coopératif défini par :

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$  est un ensemble fini de joueurs ;
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$  est un ensemble de ressources (biens, alternatives,...) ;
- Pour chaque joueur  $i \in N$ ,  $X_i \subseteq 2^R \setminus \{\emptyset\}$  dénote l'espace de stratégies du joueur  $i$  ;
- Pour chaque ressource  $r$  dans  $R$ ,  $d_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de paiement associée à la ressource  $r$  et  $d_r(k)$  est le paiement associé à la ressource  $r$  lorsque le nombre total d'utilisateurs de cette ressource est  $k$ .

Chaque joueur n'est rémunéré qu'en fonction des ressources qu'il utilise et du nombre d'utilisateurs de ces ressources. Remarquons que les fonctions de paiements peuvent donner des valeurs négatives représentant ainsi le coût d'utilisation d'une ressource. Les utilités des différents joueurs sont ensuite définies de la manière suivante : pour un profil de stratégie  $\sigma$  dans  $X$ ,  $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$  et pour un bien  $r$  dans  $R$ ,  $n_r(\sigma) = |\{i \in N : \sigma_i = r\}|$  est le nombre de joueurs qui partagent la ressource  $r$  dans le profil  $\sigma$ . Le vecteur  $n(\sigma) = (n_r(\sigma))_{r \in R} = (n_1(\sigma), n_2(\sigma), \dots, n_m(\sigma))$  est appelé vecteur de congestion associé au profil  $\sigma$ . L'utilité du joueur  $i$  dans le profil  $\sigma$  est alors définie par :

$$u_i(\sigma) = \sum_{r \in \sigma_i} d_r(n_r(\sigma)) \quad (2.1)$$

L'utilité d'un joueur est donc la somme des paiements associés aux ressources qu'il utilise, et ces paiements dépendent, à chaque fois, du nombre total de joueurs partageant avec lui la même ressource.

**Exemple 1.1.** Soit  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{a, b, c\}$ ,  $X_i = 2^R \setminus \{\emptyset\}$ , pour tout  $i \in N$ . Supposons que les fonctions de paiements soient données par :  $d_a(n_a(\sigma)) = 5 - n_a(\sigma)$ ;  $d_b(n_b(\sigma)) = n_b(\sigma)$  et  $d_c(n_c(\sigma)) = 3$ . Soit  $\sigma$  le profil de stratégie défini par  $\sigma = (\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b\})$ .

En appliquant la formule, qui permet de calculer l'utilité de chaque joueur, nous obtenons :

$$u_1(\sigma) = d_a(n_a(\sigma)) + d_c(n_c(\sigma)) = d_a(3) + d_c(2) = 2 + 3 = 5.$$

$$u_2(\sigma) = d_a(n_a(\sigma)) + d_b(n_b(\sigma)) = d_a(3) + d_b(3) = 2 + 3 = 5.$$

$$u_3(\sigma) = d_a(n_a(\sigma)) + d_b(n_b(\sigma)) + d_c(n_c(\sigma)) = d_a(3) + d_b(3) + d_c(2) = 2 + 3 + 3 = 8.$$

$$u_4(\sigma) = d_b(n_b(\sigma)) = 3.$$

### 1.2.2 Jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques

Une extension bien connue des jeux de congestion standard est celle des jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques pour chaque joueur ("Crowding games") [41] et [42]. Contrairement au cas standard, où les fonctions de paiements sont communes à tous les joueurs, un jeu de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques se distingue par le fait que chaque joueur possède sa propre fonction de paiement.

**Définition 1.2.** Un *jeu de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques* est un tuple  $G(N, R, (X_i)_{i \in N}, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  défini par :

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$  est un ensemble fini de joueurs ;

- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$  est un ensemble de ressources (biens, alternatives,...);
- Pour chaque joueur  $i \in N$ ,  $X_i \subseteq 2^R \setminus \{\emptyset\}$  dénote l'espace de stratégies du joueur  $i$ ;
- Chaque joueur  $i \in N$  a des fonctions de paiements spécifiques,  $d_r^i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\forall r \in R$ , associées à la ressource  $r$  dans  $R$ .

Pour un profil de stratégie  $\sigma$  dans  $X$ ,  $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ , pour un bien  $r$  dans  $R$  et le nombre de joueurs qui partagent la ressource  $r$  dans le profil  $\sigma$ ,  $n_r(\sigma) = |\{i \in N : \sigma_i = r\}|$ . Dans ce cas, l'utilité de chaque joueur  $i$  est alors défini par :

$$u_i(\sigma) = \sum_{r \in \sigma_i} d_r^i(n_r(\sigma)) \quad (2.2)$$

Nous allons illustrer cette définition par l'exemple suivant :

**Exemple 1.2.** Soit  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{a, b, c\}$ ,  $X_i = 2^R \setminus \{\emptyset\}$ , pour tout  $i \in N$ . Supposons que les fonctions de paiements de chaque joueur soient données par :

$$\begin{aligned} d_a^1(n_a(\sigma)) &= 5 - n_a(\sigma) & d_b^1(n_b(\sigma)) &= n_b(\sigma) & d_c^1(n_c(\sigma)) &= 3. \\ d_a^2(n_a(\sigma)) &= n_a(\sigma) & d_b^2(n_b(\sigma)) &= 2 + n_b(\sigma) & d_c^2(n_c(\sigma)) &= 4. \\ d_a^3(n_a(\sigma)) &= 4 - n_a(\sigma) & d_b^3(n_b(\sigma)) &= 1 - n_b(\sigma) & d_c^3(n_c(\sigma)) &= 3 - n_c(\sigma). \\ d_a^4(n_a(\sigma)) &= 2 - n_a(\sigma) & d_b^4(n_b(\sigma)) &= 5 - n_b(\sigma) & d_c^4(n_c(\sigma)) &= n_c(\sigma). \end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  le profil de stratégies défini par  $\sigma = (\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b\})$ . Alors, les fonctions d'utilité de chaque joueur sont :

$$\begin{aligned} u_1(\sigma) &= d_a^1(n_a(\sigma)) + d_c^1(n_c(\sigma)) = d_a^1(3) + d_c^1(2) = 2 + 3 = 5. \\ u_2(\sigma) &= d_a^2(n_a(\sigma)) + d_b^2(n_b(\sigma)) = d_a^2(3) + d_b^2(3) = 3 + 5 = 8. \\ u_3(\sigma) &= d_a^3(n_a(\sigma)) + d_b^3(n_b(\sigma)) + d_c^3(n_c(\sigma)) = d_a^3(3) + d_b^3(3) + d_c^3(2) = 1 + 2 + 1 = 3. \\ u_4(\sigma) &= d_b^4(n_b(\sigma)) = d_b^4(3) = 2. \end{aligned}$$

Ce type de jeux de congestion n'admet pas nécessairement un équilibre de Nash (H. Ackermann et al [2]) comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1.3.** Considérons un jeu de congestion avec des paiements spécifiques pour chaque joueur avec  $N = \{1, 2\}$  et  $R = \{a, b, c, d\}$ . Nous définissons l'espace de stratégie pour chaque joueur comme suit :  $X_1 = \{\{a\}, \{d\}\}$  et  $X_2 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ . Supposons que les fonctions de paiements de chaque joueur soient données par :

$$\begin{aligned} d_a^1(n_a(\sigma)) &= n_a(\sigma) & d_a^2(n_a(\sigma)) &= -2 \times n_a(\sigma) \\ d_b^1(n_b(\sigma)) &= 0 & d_b^2(n_b(\sigma)) &= 2 \times n_b(\sigma) \\ d_c^1(n_c(\sigma)) &= 0 & d_c^2(n_c(\sigma)) &= 5 \\ d_d^1(n_d(\sigma)) &= n_d(\sigma) & d_d^2(n_d(\sigma)) &= 1 - n_d(\sigma) \end{aligned}$$

Notons  $\sigma(0)$ ,  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$  et  $\sigma(3)$ , les quatre profils possibles. Nous avons donc  $\sigma(0) = (\{a\}, \{a, c\})$ ,  $\sigma(1) = (\{a\}, \{b, d\})$ ,  $\sigma(2) = (\{d\}, \{a, c\})$  et  $\sigma(3) = (\{d\}, \{b, d\})$ . D'après la formule (2.2), les utilités de chaque joueur sont données par :

$$\begin{aligned} u_1(\sigma(0)) &= d_a^1(n_a(\sigma(0))) = d_a^1(2) = 2; \\ u_2(\sigma(0)) &= d_a^2(n_a(\sigma(0))) + d_c^2(n_c(\sigma(0))) = d_a^2(2) + d_c^2(1) = -2 \times 2 + 5 = 1; \\ u_1(\sigma(1)) &= d_a^1(n_a(\sigma(1))) = d_a^1(1) = 1; \\ u_2(\sigma(1)) &= d_b^2(n_b(\sigma(1))) + d_d^2(n_d(\sigma(1))) = d_b^2(1) + d_d^2(1) = 2 \times 1 + 1 - 1 = 2; \\ u_1(\sigma(2)) &= d_d^1(n_d(\sigma(2))) = d_d^1(1) = 1; \\ u_2(\sigma(2)) &= d_a^2(n_a(\sigma(2))) + d_c^2(n_c(\sigma(2))) = d_a^2(1) + d_c^2(1) = -2 \times 1 + 5 = 3; \\ u_1(\sigma(3)) &= d_d^1(n_d(\sigma(3))) = d_d^1(2) = 2; \\ u_2(\sigma(3)) &= d_b^2(n_b(\sigma(3))) + d_d^2(n_d(\sigma(3))) = d_b^2(1) + d_d^2(2) = 2 \times 1 + 1 - 2 = 1; \end{aligned}$$

Ce jeu est alors décrit par le tableau suivant :

	$\{a, c\}$	$\{b, d\}$
$\{a\}$	(2,1)	(1,2)
$\{d\}$	(1,3)	(2,1)

Tableau 2.1 : Jeu avec des fonctions de paiements spécifiques

D'après ce tableau, il n'existe pas d'équilibre de Nash. Remarquons que dans cet exemple, les fonctions de paiements ne sont pas monotones.

Cependant, Milchtaich [41] et Fotakis et al [25] ont montré qu'il existe au moins un équilibre de Nash pour ce type de jeux dans le cas où les stratégies sont des "singletons" (choix unique) et où les fonctions de paiements sont croissantes, ce que nous allons analyser dans le paragraphe suivant.

### 1.2.3 Jeux de congestion à choix unique

Les jeux de congestion à choix unique ont été introduits par Milchtaich [41]. Ce modèle est un cas particulier des jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques, dans le sens où les fonctions de paiements  $d_r$  (pour un bien  $r$  dans  $R$ ) ne sont plus communes à tous les joueurs : pour chaque ressource  $r$ , et chaque joueur  $i$ , les paiements dépendent d'une fonction spécifique  $d_r^i$ . Cette classe de jeu généralise donc les jeux de congestion standard décrits dans le premier paragraphe 1.2.1. Cette généralisation est cependant accompagnée par deux conditions restrictives.

1. La première restriction concerne les stratégies possibles : chaque joueur ne peut choisir qu'une seule ressource à la fois. Ainsi, pour chaque joueur, l'ensemble des stratégies se confond avec l'ensemble des ressources  $R$ .

2. La deuxième restriction porte sur la nature des fonctions de paiements  $d_r^i$ . Ces fonctions doivent être décroissantes (au sens large) en fonction du nombre de joueurs utilisant le bien  $r$ .

**Remarque 1.1.** Milchtaich [41] a introduit cette classe de jeux sous le nom de "jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques" (congestion games with player-specific payoff functions). Cette terminologie n'étant pas précise (il ne revoit pas l'hypothèse selon laquelle les stratégies des joueurs sont singletons), nous la réservons aux jeux décrits dans le paragraphe 2.2.2 et nous utilisons le terme des jeux de congestion à choix unique pour désigner des jeux de congestion où les stratégies des joueurs sont des singletons et les fonctions de paiements sont à la fois décroissantes et spécifiques à chaque joueur.

**Définition 1.3.** Un jeu de congestion à choix unique  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  est défini par les caractéristiques suivantes :

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$  est un ensemble fini de joueurs ;
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$  est un ensemble de ressources (biens, alternatives, ...);
- Pour chaque joueur  $i \in N$ ,  $X_i = \{r \in 2^R : |r| = 1\} = R$ , c'est-à-dire que chaque joueur choisit exactement *une ressource* ;
- Pour chaque joueur  $i$  et chaque ressource  $r$ , la fonction de paiement spécifique  $d_r^i$  est décroissante (pas nécessairement strictement décroissante) avec le nombre de joueurs qui sélectionnent  $r$ .

Dans ce type de jeu, l'utilité de chaque joueur  $i$  dépend du paiement procuré par l'unique ressource qu'il choisit, ainsi que du nombre de joueurs partageant cette ressource avec lui. Contrairement aux jeux de congestion standard où l'utilité des joueurs s'obtient par la somme des paiements générés par le choix

de plusieurs ressources, nous pouvons ici simplifier les notations et décrire l'utilité d'un joueur  $i$  par une fonction de la forme suivante :

$$u_i(\sigma) = d_r^i(n_r(\sigma)), \text{ où } \sigma_i = r.$$

L'étude de l'existence (et la description) des équilibres de Nash dans les jeux de congestion à choix unique constituera l'objet principal des chapitres suivants.

Après avoir analysé les jeux de congestion avec leurs différents types, nous allons passer aux jeux de potentiel et évoquer les éventuelles relations qui peuvent exister entre les jeux de congestion et cette catégorie des jeux.

## 1.3 Jeux de potentiel

Dans cette section, nous allons davantage nous focaliser sur les différents types de jeux de potentiel, introduits par Monderer et Shapley [47]. Ces jeux sont caractérisés par l'existence d'une fonction de potentiel. Le concept de fonction de potentiel est fortement lié à la notion de jeux de congestion. De manière globale, la fonction de potentiel décrit la variation d'utilité des joueurs lorsqu'ils procèdent à des déviations unilatérales. Pour les jeux admettant une fonction de potentiel, la recherche d'un équilibre de Nash se ramène alors à l'identification des optimaux locaux de cette fonction.

### 1.3.1 Jeux de potentiel exact

Soit  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  un jeu sous forme stratégique où  $N$  est un ensemble de joueurs fini ;  $X_i$  un ensemble fini de stratégies pures pour le

joueur  $i$ . Soit  $X = \prod_{j \in N} X_j$ , l'espace des profils de stratégies. Pour chaque  $i \in N$ ,  $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  dénomme la fonction d'utilité du joueur  $i$ . Rappelons que  $X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$  désigne l'ensemble des profils de stratégies obtenu en considérant que les joueurs différent de  $i$ ; et qu'un profil de stratégie  $\sigma = (\sigma_j)_{j \in N}$  dans  $X$ , peut s'écrire sous la forme  $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$  où  $\sigma_i \in X_i$  et  $\sigma_{-i} \in X_{-i}$ .

**Définition 1.4.** Un jeu stratégique  $G = (N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  est un *jeu de potentiel exact* s'il existe une fonction  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que : pour tout  $i$  dans  $N$ , pour tous  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  dans  $X_i$ , et pour tout  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$  on a :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) = P(\sigma_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma'_i, \sigma_{-i}).$$

Toutes les déviations unilatérales de tous les joueurs sont mesurées par une seule fonction de potentiel. La fonction  $P$  est alors appelée *fonction de potentiel exact* (ou *potential exact*) pour  $G$ .

**Exemple 1.4.** Considérons le jeu décrit par le tableau suivant :

	$C$	$D$
$A$	(0,2)	(2,3)
$B$	(2,5)	(4,6)

Tableau 2.2 : Jeu de Potentiel exact

Montrons qu'il s'agit du jeu de potentiel exact, soit  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $P(A, C) = 0$ ,  $P(A, D) = 1$ ,  $P(B, C) = 2$  et  $P(B, D) = 3$ . Cette information peuvent être résumé par la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$u_1(A, C) - u_1(B, C) = 0 - 2 = P(A, C) - P(B, C) = 0 - 2.$$

$$u_1(A, D) - u_1(B, D) = 2 - 4 = P(A, D) - P(B, D) = 1 - 3.$$

$$u_2(A, C) - u_2(A, D) = 2 - 3 = P(A, C) - P(A, D) = 0 - 1.$$

$$u_2(B, C) - u_2(B, D) = 5 - 6 = P(B, C) - P(B, D) = 2 - 3.$$

D'après le système d'équations obtenu, nous constatons que ce jeu est un jeu de potentiel exact.

Le théorème suivant (de Facchini et al [23]), présente une caractérisation des jeux de potentiel exact, permettant ainsi de décomposer un tel jeu en une "somme" d'un jeu de coordination et d'un jeu fictif.

**Théorème 1.3.1.** (Facchini et al [23]) *Soit  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  un jeu.  $G$  est un jeu de potentiel exact si et seulement si, il existe deux fonctions  $(c_i)_{i \in N}$  et  $(f_i)_{i \in N}$  telles que :  $u_i = c_i + f_i$  pour tout  $i$  dans  $N$  avec  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (c_i)_{i \in N})$  un jeu de coordination et  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N})$  un jeu fictif.*

**Preuve.** La partie "si" est triviale : la fonction de rémunération du jeu de coordination est une fonction de potentiel exact pour  $G$ . Pour prouver la partie "seulement si", nous définissons  $P$  comme étant un potentiel exact pour  $G$ . Pour tout  $i$  dans  $N$ ,  $u_i = P + (u_i - P)$ . Il est clair que  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (P)_{i \in N})$  est un jeu de coordination. Soit  $i$  dans  $N$ , tous  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  dans  $X_i$  et  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$ .  $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) = P(\sigma_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  implique  $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ . Donc,  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i - P)_{i \in N})$  est un jeu fictif. ■

Après avoir présenté le jeu de potentiel exact, nous passons au second type de jeu de potentiel, à savoir le jeu de potentiel pondéré.

### 1.3.2 Fonction de potentiel pondéré

**Définition 1.5.** Une fonction  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  est un *potentiel pondéré* pour le jeu  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  s'il existe des réels positifs  $w_1, w_2, \dots, w_n$  (appelés poids) tels que pour tout joueur  $i$  dans  $N$ , pour tous  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  dans  $X_i$ , et pour tout  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$ , on a :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) = w_i(P(\sigma_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma'_i, \sigma_{-i})).$$

**Exemple 1.5.** Considérons le jeu  $G_1$  et la fonction  $P_1$ .

$G_1$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>c</math></td><td><math>d</math></td></tr> <tr><td><math>c</math></td><td>(1,1)</td><td>(9,0)</td></tr> <tr><td><math>d</math></td><td>(0,9)</td><td>(6,6)</td></tr> </table>		$c$	$d$	$c$	(1,1)	(9,0)	$d$	(0,9)	(6,6)
	$c$	$d$								
$c$	(1,1)	(9,0)								
$d$	(0,9)	(6,6)								

et

$P_1$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>3/2</td><td>0</td></tr> </table>	2	3/2	3/2	0
2	3/2				
3/2	0				

Nous avons

$$u_1(c, c) - u_1(d, c) = 1 = 2(P_1(c, c) - P_1(d, c)).$$

$$u_1(c, d) - u_1(d, d) = 3 = 2(P_1(c, d) - P_1(d, d)).$$

$$u_2(d, c) - u_2(d, d) = 3 = 2(P_1(d, c) - P_1(d, d)).$$

$$u_2(c, c) - u_2(c, d) = 1 = 2(P_1(c, c) - P_1(c, d)).$$

Il est facile de voir que la fonction  $P_1$  est un potentiel pondéré pour le jeu  $G_1$  ( $w_1 = 2$  et  $w_2 = 2$ ).

### 1.3.3 Fonction de potentiel ordinal

**Définition 1.6.** Une fonction  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  est un *potentiel ordinal* pour le jeu  $G(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  si pour tout joueur  $i$  dans  $N$ , pour tous  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  dans  $X_i$ , et pour tout  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$ ,

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > 0 \text{ si et seulement si } P(\sigma_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > 0.$$

Le jeu  $G$  est alors appelé *jeu de potentiel ordinal*.

**Exemple 1.6.** Considérons le jeu  $G_2$  et la fonction  $P_2$  donnés par :

		$B$	$S$		
$G_2$		$B$	(2,1)	(0,0)	
	$S$	(0,0)	(1,2)		

et

4	0
0	2

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 &u_1(B, B) - u_1(S, B) > 0 \text{ et } P_2(B, B) - P_2(S, B) > 0; \\
 &u_1(S, S) - u_1(B, S) > 0 \text{ et } P_2(S, S) - P_2(B, S) > 0; \\
 &u_2(B, B) - u_2(B, S) > 0 \text{ et } P_2(B, B) - P_2(B, S) > 0; \\
 &u_2(S, S) - u_2(S, B) > 0 \text{ et } P_2(S, S) - P_2(S, B) > 0.
 \end{aligned}$$

D'après la définition 2.6, la fonction  $P_2$  est un potentiel ordinal pour le jeu  $G_2$ .

### 1.3.4 Fonction de potentiel ordinal généralisé

**Définition 1.7.** Une fonction  $P : X \rightarrow \mathbb{R}$  est un *potentiel ordinal généralisé* pour le jeu  $G = (N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  si pour tout joueur  $i$  dans  $N$ , pour tous  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  dans  $X_i$ , et pour tout  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$ , nous avons :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > 0 \text{ implique } P(\sigma_i, \sigma_{-i}) - P(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > 0.$$

Le jeu  $G$  est alors appelé un *jeu de potentiel ordinal généralisé*.

**Exemple 1.7.** Considérons le jeu  $G_3$  et la fonction  $P_3$  suivants :

		$A$	$B$		
$G_3$		$A$	(1,0)	(2,0)	
	$B$	(2,0)	(0,1)		

et

0	3
1	2

La fonction  $P_3$  est un potentiel ordinal généralisé pour le jeu  $G_3$ . Néanmoins, la fonction  $P_3$  n'est pas un potentiel ordinal pour le jeu  $G_3$ , puisque  $P_3(A, B) - P_3(A, A) > 0$  n'implique pas  $u_3(A, B) - u_3(A, A) > 0$ .

**Remarque 1.2.** Nous avons les relations suivantes entre les différents types de jeux de potentiel :

1. Toute fonction de potentiel ordinal est une fonction de potentiel ordinal généralisé, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par conséquent, tout jeu de potentiel ordinal est un jeu de potentiel ordinal généralisé, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
2. Toute fonction de potentiel exact est une fonction de potentiel ordinal (et ainsi une fonction de potentiel ordinal généralisé), mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Ainsi, tout jeu de potentiel exact est un jeu de potentiel ordinal (et donc un jeu de potentiel généralisé).
3. Tout jeu de potentiel exact est un jeu de potentiel pondéré avec  $w_i = 1$ .

### 1.3.5 Les équilibres dans les jeux de potentiel

**Théorème 1.3.2.** (*Monderer et Shapley [47]*) Soit  $G = (N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  un jeu de potentiel ordinal (et  $P$  la fonction de potentiel ordinal associée à ce jeu). Un profil de stratégie  $\sigma \in X$  est un équilibre de Nash pour  $G$  si et seulement si pour chaque joueur  $i$  dans  $N$ , pour chaque  $\sigma'_i$  dans  $X_i$  et chaque  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$ .

$$P(\sigma) \geq P(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

Par conséquent, si  $P$  admet un maximum dans  $X$ , alors  $G$  admet un équilibre de Nash.

**Corollaire 1.3.3.** *Soit  $G$  un jeu fini. Si  $G$  est un jeu de potentiel ordinal alors  $G$  admet un équilibre de Nash.*

**Preuve.** La fonction de potentiel  $P$  est une fonction définie sur l'ensemble de profil de stratégies  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Comme le jeu est fini,  $X$  est fini. Alors, la fonction  $P$  prend donc un nombre fini de valeurs et elle admet ainsi un maximum sur  $X$ . Soit  $\sigma^*$  c'est le maximum, nous avons alors :

$$P(\sigma^*) \geq P(\sigma)$$

Pour tout joueur  $i$  dans  $N$ , pour tout  $\sigma$  dans  $X$  et pour tout  $\sigma_i$  dans  $X_i$ , nous avons :  $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = P(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) - P(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \geq 0$ . Ce qui montre que  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash. ■

**Exemple 1.8.** Considérons le jeu  $G_4$  et la fonction  $P_4$  suivants :

$G_4$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>C</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>D</math></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>C</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>(1,1)</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>(9,0)</math></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>D</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>(0,9)</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>(6,6)</math></td> </tr> </table>		$C$	$D$	$C$	$(1,1)$	$(9,0)$	$D$	$(0,9)$	$(6,6)$
	$C$	$D$								
$C$	$(1,1)$	$(9,0)$								
$D$	$(0,9)$	$(6,6)$								

et

$P_4$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>4</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>3</math></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>3</math></td> <td style="width: 30px; height: 30px;"><math>0</math></td> </tr> </table>	$4$	$3$	$3$	$0$
$4$	$3$				
$3$	$0$				

On vérifie facilement que la fonction  $P_4$  est un potentiel ordinal pour  $G_4$ . Nous constatons que le profil  $(C, C)$  est un maximum pour la fonction  $P_4$ . D'après le théorème 2.3.1, le profil  $(C, C)$  est un équilibre de Nash pour  $G_4$  (ce que nous pouvons vérifier directement à partir de tableau).

**Définition 1.8.** Soit  $M$  un entier non nul, une séquence de stratégies de longueur  $M + 1$  est une suite finie de stratégies telle que :  $j(0), j(1), \dots, j(k - 1), j(k), \dots, j(M)$ .

**Définition 1.9.** *Voie* ("Path") : Une voie est une suite (finie ou infinie) de profils de stratégies :  $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k - 1), \sigma(k), \dots$ . La notation  $\sigma(k) \rightarrow \sigma(k + 1)$  signifie, qu'en passant du profil  $\sigma(k)$  au profil  $\sigma(k + 1)$ , un seul joueur dévie (i.e, change de stratégie).

**Définition 1.10.** Une *voie d'amélioration* est une voie telle qu'à chaque étape  $\sigma(k - 1) \rightarrow \sigma(k)$ , le joueur qui dévie améliore strictement son utilité.

Cette notion de voie d'amélioration permet de montrer pour certains types de jeu qu'un équilibre de Nash existe. Ces jeux doivent vérifier la propriété ci-dessous.

**Définition 1.11.** Un jeu possède *la propriété d'amélioration finie* ("Finite Improvement property" (FIP)) si toute voie d'amélioration est finie.

Il est clair qu'un jeu vérifiant la propriété d'amélioration finie admet obligatoirement un équilibre de Nash. En effet, si  $\sigma(0) \rightarrow \sigma(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma(M)$  est une voie d'amélioration maximale, le profil  $\sigma(M)$  est un équilibre de Nash puisqu'aucun joueur ne peut plus dévier pour améliorer strictement son utilité.

**Exemple 1.9.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $X = \{a, b, c\}$ . Supposons une séquence de stratégies définie par :  $j(0) = a, j(1) = b, j(2) = c, j(3) = a$  et  $j(4) = b$ . Les profils de stratégies sont donnés par :  $\sigma(0) = (a, a, a, b, c)$ ,  $\sigma(1) = (a, b, a, b, c)$  et  $\sigma(2) = (a, b, a, c, c) \dots$

Le passage  $\sigma(0) \rightarrow \sigma(1)$  signifie que le joueur 2 a changé de stratégie  $a$  vers stratégie  $b$ . Le passage  $\sigma(1) \rightarrow \sigma(2)$  signifie que le joueur 4 a changé de stratégie  $b$  vers stratégie  $c$ , et ainsi de suite.

En effet, l'utilité du joueur 2 lorsqu'il joue  $b$  est :  $u_2(\sigma(1)) > u_2(\sigma(0))$ . Ce qui se traduit par le fait que le joueur 2 ait changé stratégie à l'autre afin d'améliorer strictement son utilité. De même pour le joueur 4, on a :  $u_4(\sigma(2)) > u_4(\sigma(1))$ .

D'après le concept de la propriété d'amélioration finie (Finite Improvement Property (FIP)) cité dans le chapitre précédent, on peut introduire les deux corollaires suivants :

**Corollaire 1.3.4.** *Tout jeu de potentiel ordinal fini possède la FIP.*

**Preuve.** Pour toute voie d'amélioration  $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k-1), \sigma(k), \dots$ , on a par le théorème

$$P(\sigma) \geq P(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

Comme  $X_i$  est un ensemble fini, la voie d'amélioration doit être finie. ■

Il est clair que dire d'un jeu qu'il possède la FIP et que ses dynamiques de Nash convergent, est équivalent. Donc, toute voie d'amélioration maximale doit aboutir à un équilibre de Nash.

Il est intéressant de remarquer que posséder la FIP n'est pas équivalent à avoir un potentiel ordinal.

**Corollaire 1.3.5.** *Un jeu fini  $G$  possède la FIP si et seulement si  $G$  admet un potentiel ordinal généralisé<sup>2</sup>.*

---

2. Voir la preuve du corollaire dans l'article de Monderer et Shapley [47]

Dans ce qui précède, nous avons présenté les différents types de jeux de congestion et les différents types de jeux de potentiel. Dans la section suivante, nous allons nous intéresser aux deux questions suivantes : quels sont les jeux de congestion qui admettent une fonction de potentiel ? Et de manière plus générale, quels sont les jeux de congestion qui admettent toujours un équilibre de Nash ?

## 1.4 Jeux de congestion et équilibre de Nash

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence de l'équilibre de Nash dans les jeux de congestion. Nous présenterons les résultats qui relient, d'un côté, les jeux de congestion standard et les jeux de potentiel, et d'un autre, les jeux de congestion à choix unique et la propriété d'amélioration finie.

### 1.4.1 Jeux de congestion standard, fonction de potentiel et équilibre de Nash

Rosenthal [57] a été le premier à définir la catégorie des jeux de congestion (standard) et à prouver l'existence de l'équilibre de Nash pour ce type de jeux.

**Théorème 1.4.1.** *(Rosenthal [57]) Tout jeu de congestion (standard) possède au moins un équilibre de Nash*<sup>3</sup>

**Preuve.** Soit  $G(N, R, (X_i)_{i \in N}, (d_r)_{r \in R})$  un jeu de congestion standard, soit  $P$  la fonction définie sur  $X$  par :

$$P(\sigma) = \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{n_r(\sigma)} d_r(k) \quad \forall \sigma \in X \quad (1.4.1)$$

---

3. Preuve : Voir Article de Rosenthal [57].

Nous montrons que  $P$  est une fonction de potentiel exact pour le jeu  $G$ . Il s'agit donc de montrer pour tout  $i$  dans  $N$ , pour tous  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  dans  $X_i$ , et pour tout  $\sigma_{-i}$  dans  $X_{-i}$  nous avons :

$$u_i(\sigma) - u_i(\sigma') = P(\sigma) - P(\sigma') \text{ avec } (\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sigma \text{ et } (\sigma'_i, \sigma_{-i}) = \sigma'$$

Rappelons que :  $u_i(\sigma) = \sum_{r \in \sigma_i} d_r(n_r(\sigma))$  et  $u_i(\sigma') = \sum_{r \in \sigma'_i} d_r(n_r(\sigma'))$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer (quitte à changer les numéros des joueurs) que  $i = n$ .

En inversant les additions dans (2.4.1), on obtient la formule suivante :

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{r \in \sigma_i} d_r(n_r^{\leq i}(\sigma))$$

où  $n_r^{\leq i}$  désigne le nombre total de joueurs, dont le numéro est inférieur ou égal à  $i$ , qui utilisent le bien  $r$ . On a alors :

$$\begin{aligned} P(\sigma) - P(\sigma') &= \sum_{r \in \sigma_n} d_r(n_r^{\leq n}(\sigma)) - \sum_{r \in \sigma_n} d_r(n_r^{\leq n}(\sigma')) \\ &= \sum_{r \in \sigma_n} d_r(n_r(\sigma)) - \sum_{r \in \sigma_n} d_r(n_r(\sigma')) \\ &= u_n(\sigma) - u_n(\sigma') \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $P$  est une fonction de potentiel exact pour le jeu  $G$ . D'après le corollaire 1.3.3,  $G$  admet au moins un équilibre de Nash. ■

La preuve du théorème de Rosenthal [57], (Monderer et Shapley [47]) passe par la construction d'une fonction de potentiel exact. Ce qui montre que tout jeu de congestion standard est un jeu de potentiel exact.

Nous pouvons alors nous poser la question si, réciproquement, tout jeu de potentiel exact est un jeu de congestion. La réponse à cette question passe par la notion de jeu "isomorphe" (ou équivalent).

**Définition 1.12.** soit  $\Gamma_1(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  et  $\Gamma_2(N, (Y_i)_{i \in N}, (v_i)_{i \in N})$  deux jeux sous forme stratégique avec le même ensemble de joueurs  $N$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  dis *isomorphe* si pour tout  $i$  dans  $N$  il existe une bijection  $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i$  telle que  $u_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = v_1(\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_n(\sigma_n))$ , pour tous  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  dans  $X$ .

Le théorème suivant montre que pour tout jeu de potentiel exact, nous pouvons faire correspondre (de manière bijective) un jeu de congestion standard.

**Théorème 1.4.2.** (*Monderer and Shapley, [47]*) *Tout jeu de potentiel exact est isomorphe à un jeu de congestion.*

Rappelons que le théorème 2.3.1 établit que tout jeu de potentiel exact se décompose en une somme de jeu de coordination et de jeu fictif. Le théorème 2.4.2 est alors une conséquence de théorème 2.3.1 et des deux théorèmes suivants (théorème 2.4.3 et théorème 2.4.4).

**Théorème 1.4.3.** *Tout jeu de coordination est isomorphe à un jeu de congestion.*

Un jeu de congestion dans lequel les ressources ont des paiements non-nuls seulement si tous les joueurs les utilisent est clairement un jeu de coordination.

**Exemple 1.10.** Considérons le jeu de coordination dans le tableau suivant : (pour simplifier, le tableau ne contient pas le nom des stratégies des joueurs)

(0,0)	(1,1)
(2,2)	(3,3)

Tableau 2.3 : Jeu de coordination

Nous allons construire un jeu de congestion ayant comme ensemble des ressources  $\{A, B, C, D\}$ , et comme espace des stratégies pour chaque joueur :  $X_1 = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$  et  $X_2 = \{\{A, C\}, \{B, D\}\}$ . On considère l'ensemble de profil de stratégies tel que :

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= (\{A, B\}, \{A, C\}) & \sigma(1) &= (\{A, B\}, \{B, D\}) \\ \sigma(2) &= (\{C, D\}, \{A, C\}) & \sigma(3) &= (\{C, D\}, \{B, D\}) \end{aligned}$$

Les fonctions de paiements sont définies de la manière suivante :

$d_r(n_r(\sigma)) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$  si  $n_r(\sigma) = n$  et  $d_r(n_r(\sigma)) = 0$  si  $n_r(\sigma) \neq n$  (où  $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$  désigne l'utilité de jeu de coordination), Alors, la fonction de paiement pour chaque ressource associée au nombre total d'utilisateurs est :

$d_A(1) = 0, d_A(2) = 0, d_B(1) = 0, d_B(2) = 1, d_C(1) = 0, d_C(2) = 2, d_D(1) = 0, d_D(2) = 3$ , alors l'utilité de chaque joueur est définie par  $u_i(\sigma) = \sum_{r \in \sigma_i} d_r(n_r(\sigma))$  ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} u_1(\sigma(0)) &= d_A(2) + d_B(1) = 0; & u_2(\sigma(0)) &= d_A(2) + d_C(1) = 0; \\ u_1(\sigma(1)) &= d_A(1) + d_B(2) = 1; & u_2(\sigma(1)) &= d_B(2) + d_D(1) = 1; \\ u_1(\sigma(2)) &= d_C(2) + d_D(1) = 2; & u_2(\sigma(2)) &= d_A(1) + d_C(2) = 2; \\ u_1(\sigma(3)) &= d_C(1) + d_D(2) = 3; & u_2(\sigma(3)) &= d_B(1) + d_D(2) = 3. \end{aligned}$$

Ce jeu est alors décrit par le tableau suivant :

	$\{A, C\}$	$\{B, D\}$
$\{A, B\}$	(0,0)	(1,1)
$\{C, D\}$	(2,2)	(3,3)

Tableau 2.4 : Jeu de congestion isomorphe au jeu de coordination

En effet, il est facile de vérifier (en revenant à la définition 2.8) que les deux jeux sont isomorphes.

**Théorème 1.4.4.** *Tout jeu fictif est isomorphe à un jeu de congestion.*

Rappelons qu'un jeu fictif est un jeu dans lequel les utilités des joueurs sont indépendantes des stratégies qu'ils choisissent.

**Exemple 1.11.** Considérons le jeu fictif suivant :

(0,2)	(1,2)
(0,3)	(1,3)

Tableau 2.5 : Jeu fictif

Nous allons construire un jeu de congestion avec un ensemble des ressources  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ , un espace de stratégies pour chaque joueur  $X_1 = \{\{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$  et  $X_2 = \{\{\beta, \gamma, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}\}$ , un ensemble de profil de stratégies tel que :

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= (\{\alpha, \beta, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}) & \sigma(1) &= (\{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}) \\ \sigma(2) &= (\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\beta, \gamma, \delta\}) & \sigma(3) &= (\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}) \end{aligned}$$

et des fonctions de paiements qui sont définies de la manière suivante :

$d_r(n_r(\sigma)) = v_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$  si  $n_r(\sigma) = 1$  et  $d_r(n_r(\sigma)) = 0$  si  $n_r(\sigma) \neq 1$  (où  $v_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$  désigne l'utilité de jeu fictif). Alors,  $d_\alpha(1) = 0, d_\alpha(2) = 0, d_\beta(1) = 1, d_\beta(2) = 0, d_\gamma(1) = 2, d_\gamma(2) = 0, d_\delta(1) = 3, d_\delta(2) = 0$ . Nous savons que l'utilité de joueur  $i$  est définie par  $u_i(\sigma) = \sum_{r \in \sigma_i} d_r(n_r(\sigma))$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u_1(\sigma(0)) &= 0 \quad \text{et} \quad u_2(\sigma(0)) = 2; & u_1(\sigma(1)) &= 1 \quad \text{et} \quad u_2(\sigma(1)) = 2; \\ u_1(\sigma(2)) &= 0 \quad \text{et} \quad u_2(\sigma(2)) = 3; & u_1(\sigma(3)) &= 1 \quad \text{et} \quad u_2(\sigma(3)) = 3. \end{aligned}$$

Ce jeu est alors décrit par le tableau suivant :

	$\{\beta, \gamma, \delta\}$	$\{\alpha, \gamma, \delta\}$
$\{\alpha, \beta, \delta\}$	(0,2)	(1,2)
$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	(0,3)	(1,3)

Tableau 2.6 : Jeu de congestion isomorphe au jeu fictif

D'après la définition 2.8, nous pouvons vérifier facilement que les deux jeux sont isomorphes.

L'exemple suivant montre comment nous pouvons décomposer un jeu de potentiel exact en une somme d'un jeu de coordination (isomorphe au jeu de congestion) et un jeu fictif (isomorphe au jeu de congestion).

**Exemple 1.12.** Reprenons le jeu de l'exemple 2.4 :

	$C$	$D$
$A$	(0,2)	(2,3)
$B$	(2,5)	(4,6)

Nous avons déjà montré que ce jeu est un jeu de potentiel exact (exemple 2.5).

Ce jeu se décompose en une somme de jeu de coordination (celui de l'exemple 2.10) et de jeu fictif (celui de l'exemple 2.11). Voir le tableau 2.7 ci-dessous.

	$\{A, C\}$	$\{B, D\}$	+		$\{\beta, \gamma, \delta\}$	$\{\alpha, \gamma, \delta\}$
$\{A, B\}$	(0,0)	(1,1)		$\{\alpha, \beta, \delta\}$	(0,2)	(1,2)
$\{C, D\}$	(2,2)	(3,3)		$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	(0,3)	(1,3)

Tableau 2.7 : Jeu potentiel exact et jeu de congestion isomorphe

### 1.4.2 Jeux de congestion à choix unique et voie d'amélioration

Pour cette famille de jeux de congestion, la recherche d'équilibre de Nash est souvent abordée en termes de voie d'amélioration. Milchtaich [41] a établi que les jeux de congestion à choix unique symétriques possèdent la propriété d'amélioration finie et, par conséquent, admettent toujours un équilibre de Nash. Cette classe de jeu symétrique sera traitée de manière approfondie dans le chapitre 2, où nous proposerons une démarche qui n'utilise pas les voies d'amélioration et permet de décrire tous les équilibres de Nash dans ce type de jeux. Dans le même article, Milchtaich ([41]) a étendu son résultat concernant le cas symétrique aux jeux de congestion à choix unique non symétriques lorsque l'ensemble des ressources ne contient que deux éléments.

**Théorème 1.4.5.** *Tout jeu de congestion avec deux stratégies possède la propriété d'amélioration finie.*

Dans le cas général, Milchtaich [41] a démontré que la propriété d'amélioration finie n'est pas toujours vérifiée. Cependant, il a établi le résultat suivant :

**Théorème 1.4.6.** *Tout jeu de congestion à choix unique possède un équilibre de Nash.*

Mentionnons que Konishi et al [36] ont donné une autre preuve du théorème ci-dessus, en adoptant cette fois-ci une définition des jeux de congestion à choix unique légèrement différente de celle proposée par de Milchtaich. L'étude des jeux de congestion à choix unique non symétriques constituera l'essentiel du chapitre 3, où nous proposerons des preuves alternatives de l'existence d'un équilibre de Nash, toujours sans faire appel à la notion de voie d'amélioration.

## 1.5 Complexité des jeux de congestion

Dans cette section, nous allons donner une idée générale à propos de la complexité de calcul d'un ou plusieurs équilibre(s) de Nash à travers des algorithmes dans les jeux de congestion. En d'autres termes, lorsque nous voulons identifier un équilibre de Nash (ou tous les équilibres) pour un jeu donné, il faut avoir recours à des algorithmes permettant de le(s) calculer. Cependant, selon la forme du jeu, cela peut être plus ou moins complexe à réaliser. La complexité tient, notamment, au temps de calcul de ces équilibres grâce à l'algorithme. En effet, pour que l'algorithme soit jugé efficace, il doit pouvoir calculer les équilibres dans un temps raisonnable. Les temps de calcul sont généralement les temps de calcul en deux classes : les temps appelés "polynomiaux" et les temps appelés "exponentiels". La seconde catégorie, comme son nom l'indique, voit le temps de calcul augmenter de manière exponentielle lorsque la taille du problème (nombre de joueurs, nombre de stratégies possible par joueur,...) augmente ; ce qui en fait un temps non acceptable, car trop long lorsque la taille du problème est importante. À l'inverse, dans le cas des algorithmes dont le temps de calcul est polynomial, l'augmentation du nombre de joueurs ou des profils de stratégies ne fait pas exploser le temps de calcul : les algorithmes de ce type ont donc un temps de calcul raisonnable.

Dans les jeux de congestion standard, la fonction de potentiel implique directement un algorithme pseudo-polynomial pour calculer un équilibre de Nash, et pour interpréter les jeux de congestion comme des problèmes de "recherche locale"<sup>4</sup>

---

4. Recherche Locale : Étant donné un problème combinatoire d'optimisation avec une structure superposée de voisinage, c'est-à-dire, un ensemble de solutions proche de cette solution, la recherche locale fonctionne comme suit. À partir d'une solution initiale indépendamment obtenue, on remplace à plusieurs reprises la solution courante par une solution

La question que nous pouvons nous poser est relative à la difficulté de calculer un optimum local. La formalisation de cette question par la définition d'une nouvelle classe de complexité appelée *classe PLS* (Polynomial Local Search). Un problème de recherche locale est dans la classe des problèmes de recherche locale polynomiale. Cette classe se compose des relations qui associent les instances d'un problème combinatoire d'optimisation avec les optimaux locaux<sup>5</sup> pour ces instances.

Pour conclure cette section, remarquons que le problème consistant à trouver un équilibre de Nash dans les jeux de congestion appartient à la classe PLS étant donné que ceci est équivalent à trouver un optimum local de la fonction de potentiel de Rosenthal (voir Fabrikant, Papadimitriou et Talwar [22]).

## 1.6 Conclusion

Nous venons de présenter les différents types de jeux de congestion et de passer en revue les principales contributions portant sur l'étude de l'existence et la détermination des équilibres de Nash dans ce type de jeux. Les points importants de ce chapitre peuvent être résumés de la manière suivante. D'abord, le résultat de Rosenthal établissant l'existence d'équilibres de Nash dans les

---

voisine (d'une meilleure valeur), jusqu'à ce qu'aucune telle solution voisine n'existe, point où on a identifié une solution localement optimale. Typiquement, nous répétons cette procédure pour autant de solutions initiales aléatoirement choisies et adoptons le meilleur optimum local trouvé. Le temps de fonctionnement des algorithmes de recherche locale dépend de la fonction objective et est ainsi pseudo polynomial en général et exponentiel dans le pire des cas.

5. Étant donné une instance, toutes les solutions doivent avoir une taille polynomiale liée avec l'instance et nous devons pouvoir produire une certaine solution en temps polynomial. Deuxièmement, étant donné une instance et une solution nous devons pouvoir calculer le coût de la solution en temps polynomial. Pour conclure, étant donné une instance et une solution nous devons pouvoir en temps polynomial déterminer si cette solution est localement optimale et sinon de produire une solution voisine de coût amélioré.

jeux de congestion standard et la correspondance entre cette classe de jeux et celle des jeux de potentiel exact. Ensuite, l'impossibilité de généraliser ce résultat aux jeux de congestion avec fonctions de paiements spécifiques (exemple 2.3). Enfin, la mise en évidence de la relation entre les jeux de congestion à choix unique et la notion de voie d'amélioration, utilisée par Milchtaich. Pour ce dernier point, nous avons distingué le cas symétrique, pour lequel la propriété de la voie d'amélioration finie est toujours vérifiée, du cas non symétrique qui peut donner lieu à des situations de cyclicité des voies d'amélioration. Il est à noter que les théorèmes de Rosenthal et Milchtaich sont essentiellement des résultats d'existence d'au moins un équilibre de Nash. Même si les preuves sont constructives et permettent de construire cet équilibre, il est difficile de les exploiter pour trouver tous les équilibres de Nash. Il serait donc intéressant de réexaminer ces preuves, en particulier les mécanismes d'amélioration proposés par Milchtaich, dans une perspective d'identification, quand c'est possible, de tous les équilibres. C'est sous cet angle que nous procéderons, dans le chapitre suivant, à un réexamen des résultats concernant le cas symétrique des jeux de congestion à choix unique avec des fonctions de paiements spécifiques.

## Chapitre 2

# Équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique : le cas symétrique

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude des équilibres de Nash dans les jeux de congestion à choix unique, dans le cas symétrique. Dans cette classe de jeux, les joueurs ne peuvent choisir qu'une seule ressource et partagent les mêmes fonctions de paiements et donc la même fonction d'utilité. Dans un premier temps, nous présentons le mécanisme proposé par Milchtaich [41] pour aboutir à un équilibre de Nash dans ce type de jeu. Nous discuterons alors, les limites de cette méthode basée sur la propriété d'amélioration finie (finite improvement property (FIP)). Nous proposons ensuite, une formule simple qui permet de décrire tous les équilibres de Nash pour un jeu de congestion à choix unique symétrique. Nous donnerons une preuve simple et courte de cette formule, sans utiliser la propriété d'amélioration finie et sans passer par la notion de la fonction de potentiel. Nous exploiterons alors cette preuve pour proposer un algorithme permettant de réduire le temps de calcul des équilibres de Nash.

## 2.1 Introduction

Un jeu est symétrique si tous les joueurs ont le même ensemble de stratégie et leurs fonctions d'utilité sont identiques. Ce type de jeu était déjà pris en compte dans le travail original de Nash [51]. Les jeux de congestion standard introduit par Rosenthal sont des exemples de jeux symétriques : tous les joueurs ont le même ensemble de stratégies, constituent des parties de l'ensemble commun, et ont la même fonction de paiement et donc la même fonction d'utilité.

Les jeux de congestion à choix unique symétriques, auxquelles nous nous intéressons dans ce chapitre, ne sont en fait qu'un cas particulier des jeux de congestion standard. Leur particularité est que les joueurs sont restreints à choisir un seul bien à la fois. Naturellement, ces jeux forment aussi une sous-famille de la famille, plus générale, des jeux de congestion à choix unique avec des fonctions de paiements spécifiques, introduits par Milchtaich. Il est donc clair, que la catégorie des jeux de congestion à choix unique symétriques se situe à l'intersection du modèle de Rosenthal et celui de Milchtaich.

Une réalisation concrète de ce modèle est celle de la congestion des réseaux routiers. Par exemple, un groupe de conducteurs conduisant de Caen à Paris pour un week-end (tous peuvent choisir le même ensemble de parcours disponibles), en ce qui concerne la durée du voyage, dépendra du choix de l'itinéraire mais aussi du nombre d'usagers de chaque route. Si on suppose que le temps est apprécié de la même manière par tous les usagers, on se trouve alors dans un cas de jeu de congestion à choix unique symétrique.

## 2.2 Équilibres dans un jeu de congestion à choix unique symétrique

Nous savons, par le théorème de Rosenthal [57], que tout jeu de congestion standard possède au moins un équilibre de Nash. Les jeux de congestion à choix unique symétriques étant des cas particuliers du modèle de Rosenthal, ils admettent donc toujours un équilibre de Nash. Notons au passage que le résultat de Rosenthal ne s'applique pas (toujours) aux jeux de congestion à choix unique non symétriques. En effet, dans le cas (général) où les fonctions de paiements sont spécifiques à chaque joueur, nous ne sommes plus en présence d'un cas particulier de jeux de congestion standard et n'avons aucune information sur l'existence d'une fonction de potentiel qui garantisse l'existence d'un équilibre de Nash. L'objectif de cette section est de présenter les principaux résultats concernant l'existence (et la description) d'équilibres de Nash dans les jeux de congestion à choix unique symétriques. Nous nous intéresserons particulièrement aux méthodes permettant d'identifier ces équilibres. Nous illustrerons à chaque fois, les résultats présentés avec des exemples simples.

### 2.2.1 Passage du contexte cardinal au contexte ordinal

Dans le chapitre 1, nous avons déjà présenté la définition des jeux de congestion à choix unique (symétriques ou non), introduit par Milchtaich [41] sous le nom de "jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques". Pour commencer, rappelons cette définition.

**Définition 2.1.** Un *jeu de congestion à choix unique*  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  est défini par les caractéristiques suivantes :

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ , un ensemble fini de joueurs ;
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$ , un ensemble de ressources (biens, alternatives, options, ...);
- Pour chaque joueur  $i \in N$ ,  $X_i = \{r \in 2^R : |r| = 1\} = R$ . C'est-à-dire que chaque joueur choisit exactement *une seule ressource* ;
- Pour chaque joueur  $i$  et chaque ressource  $r$ , la fonction de paiement spécifique  $d_r^i$  est décroissante (pas nécessairement strictement décroissante) avec le nombre de joueurs qui sélectionnent  $r$ .

Rappelons aussi que l'utilité du joueur  $i$  dépend du paiement procuré par l'unique ressource qu'il choisit ainsi que du nombre de joueurs partageant cette ressource avec ce dernier. On a donc, pour un profil de stratégie  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  :

$$u_i(\sigma) = d_r^i(n_r(\sigma)), \text{ où } \sigma_i = r.$$

Cette utilité peut alors être décrite par une fonction " $u$ " telle que :

$$\begin{aligned} u_i : R \times \{1, \dots, n\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, k) &\mapsto u_i(r, k) \end{aligned}$$

où  $u_i$  est décroissante en  $k$ .

Dans ce chapitre et dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons essentiellement à l'existence (et si possible à la description) d'équilibres de Nash dans les jeux de congestion à choix unique. Pour cet objectif, on supposera que l'information (cardinale) contenue dans la fonction ci-dessus n'est que "secondaire". En effet, nous pouvons définir les utilités des différents joueurs, par des ordres de préférence, et adapter la notion d'équilibre de Nash à ce contexte ordinal :

1. L'utilité du joueur  $i$  est représentée par un *préordre complet* (relation

binaire réflexive, transitive et complète)  $\preceq_i$  sur  $R \times \{1, \dots, n\}$  tel que :  
pour tout  $r$  dans  $R$ , pour tous  $k$  et  $k'$  dans  $R \times \{1, \dots, n\}$ ,  $k \preceq_i k' \Rightarrow (r, k) \preceq_i (r, k')$ . La relation d'indifférence du joueur  $i$  sera notée  $\sim_i$ .

2. *Un profil de stratégies* est un équilibre de Nash si aucun joueur ne préfère changer de stratégie (ressource) pour rejoindre des joueurs ayant choisi une autre ressource (ou simplement opter pour un bien qu'aucun autre joueur n'a choisi). Plus formellement, un profil  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  est un équilibre de Nash si :

$$(\sigma^*, n_{\sigma^*}(\sigma^*)) \succeq (r, n_r(\sigma^*) + 1).$$

**Exemple 2.1.** Soit  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Nous pouvons classer toutes les fonctions d'utilité cardinales de chaque joueur en ordre décroissant de la manière suivante :

$$u_1(3a) < u_1(3b) = u_1(2b) < u_1(2a) < u_1(3c) = u_1(a) < u_1(2c) < u_1(c) < u_1(b);$$

$$u_2(3c) < u_2(3a) = u_2(2a) < u_2(3b) < u_2(2b) < u_2(a) < u_2(2c) < u_2(b) = u_2(c);$$

$$u_3(3a) < u_3(3c) < u_3(2c) < u_3(2a) < u_3(c) < u_3(a) < u_3(3b) < u_3(2b) < u_3(b).$$

Pour simplifier la notation, nous utilisons des fonctions d'utilité ordinales pour chaque joueur, et désignerons  $u_i(r, k)$  par une notation simplifiée :  $k.r$ . Nous pouvons à présent réécrire cet ordre pour chaque joueur, de la façon suivante :

$$3a \prec_1 3b \sim_1 2b \prec_1 2a \prec_1 3c \sim_1 a \prec_1 2c \prec_1 c \prec_1 b.$$

$$3c \prec_2 3a \sim_2 2a \prec_2 3b \prec_2 2b \prec_2 a \prec_2 2c \prec_2 b \sim_2 c.$$

$$3a \prec_3 3c \prec_3 2c \prec_3 2a \prec_3 c \prec_3 a \prec_3 3b \prec_3 2b \prec_3 b.$$

Dans cet exemple,  $3a$  représente le couple  $(a, 3)$ , c'est-à-dire, 3 joueurs choisissent le bien  $a$ . De même,  $b$  remplace le couple  $(b, 1)$  et représente le cas où un seul joueur a choisi la ressource  $b$ , et ainsi de suite.

Il est facile de vérifier dans cet exemple que  $\sigma^* = (c, c, b)$  est un équilibre de Nash puisque,

$$2c \succeq_1 a \text{ et } 2c \succeq_1 2b$$

$$2c \succeq_2 a \text{ et } 2c \succeq_2 2b$$

$$b \succeq_3 a \text{ et } b \succeq_3 3c.$$

## 2.2.2 Profils de stratégies et vecteurs de congestion

Dans un jeu de congestion à choix unique symétrique, tous les joueurs ont les mêmes ordres de préférence. Ils deviennent donc interchangeables et leur identité n'a plus d'importance. La seule information pertinente, dans un profil de stratégies, est la suivante : pour chaque bien  $r$  dans  $R$ , combien de joueurs ont choisi ce bien ? Ainsi pour un profil de stratégies  $\sigma$ , il suffit de connaître les nombres de joueurs  $n_r(\sigma)$ , pour chaque bien  $r$  dans  $R$ . Or, ces nombres forment un vecteur de congestion. Rappelons ici, la notion de vecteur de congestion que nous avons définie au second chapitre.

**Définition 2.2.** *Un vecteur de congestion est le vecteur indiquant le nombre de joueurs ayant choisi chaque ressource.*

Dans ce qui suit, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous confondons tout profil de stratégies  $\sigma$  avec son vecteur de congestion, qui sera aussi noté par  $\sigma$ .

**Exemple 2.2.** Considérons  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  un jeu avec :  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{a, b, c\}$  et  $X_i = R$ , pour tout  $i$  dans  $N$ .

Supposons que les joueurs 1 et 3 choisissent la ressource  $a$ , et le joueur 2, la ressource  $c$ , le vecteur de congestion correspondant est  $\sigma = (2a, 0b, c)$ . Comment peut-on, à partir de ce vecteur, identifier les profils de stratégies ?

La réponse est simple, les fonctions d'utilité étant toutes les mêmes, nous n'avons pas besoin de savoir quels joueurs ont choisi telle ou telle ressource, mais uniquement combien ont effectivement choisi chaque ressource. Ainsi, si deux profils de stratégies  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont le même vecteur de congestion, alors (par la symétrie)  $\sigma'$  est une permutation de  $\sigma$ .

**Exemple 2.3.** Soit  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  un jeu avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Soient  $(a, a, b, b, c)$ ,  $(a, b, a, b, c)$  et  $(b, a, c, b, a)$  les profils de stratégies. Nous pouvons représenter ces trois profils par un seul vecteur de congestion  $(2a, 2b, c)$  (dans le cas symétrique).

En fait, il y a 30 profils de stratégies ( $C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1$ ) qui correspondent au vecteur de congestion  $(2a, 2b, c)$ .

Dans ce qui suit, nous allons présenter et commenter deux méthodes qui permettent d'identifier l'existence d'équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique symétriques : L'une de Rosenthal [57] avec la fonction de potentiel et l'autre de Milchtaich [41] avec la voie d'amélioration finie.

### 2.2.3 Équilibre de Nash et fonction de potentiel

Les jeux de congestion (à choix unique symétriques) étant des cas particuliers du jeu de congestion standard, nous connaissons par Rosenthal qu'ils possèdent toujours au moins un équilibre de Nash. Via la preuve du théorème de Rosenthal [57], et en cherchant le maximum de la fonction de potentiel, nous pouvons construire un algorithme qui nous donne un des équilibres de Nash du jeu. Cependant, lorsque le nombre de joueurs augmente, le temps de calcul nécessaire à cette maximisation, augmente de manière exponentielle. Autrement dit, un algorithme peut être dérivé à partir de la preuve du théorème de Rosenthal, qui donne cet équilibre en un temps exponentiel (soit  $O(m^n)$  étapes).

### 2.2.4 Équilibre de Nash et voie d'amélioration finie : Méthode de Milchtaich

D'après Monderer et Shapley [46], l'existence d'une fonction de potentiel exacte implique la propriété d'amélioration finie. Par conséquent, pour trouver un équilibre de Nash dans un jeu vérifiant la condition FIP, il suffit de considérer une voie d'amélioration en partant d'un point initial arbitraire (un profil de stratégies quelconque). Cette voie d'amélioration étant obligatoirement finie, elle s'achève nécessairement par un équilibre, car le point terminal ne peut être prolongé. En se basant sur cette idée, Milchtaich [41] a prouvé directement l'existence d'un équilibre de Nash (dans le cas symétrique) sans utiliser la fonction de potentiel. Cette preuve contient implicitement un algorithme permettant de calculer l'équilibre de Nash en un temps polynômial (au plus  $O(n^2 \times m)$  étapes).

**Théorème 2.2.1.** (Milchtaich [41]) : *Tout jeu de congestion à choix unique symétrique possède la propriété de la voie d'amélioration finie, et par conséquent, admet toujours un équilibre de Nash.*

**Preuve.** Supposons le contraire. Il existe une voie d'amélioration infinie :

$$\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k), \dots$$

Pour un jeu de congestion à choix unique symétrique, et comme l'ensemble de biens et le nombre de joueurs sont finis, toute voie d'amélioration infinie doit comporter des répétitions.

On peut donc supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un nombre entier  $M > 1$  tel que :  $\sigma(0) = \sigma(M)$ . On a donc la chaîne d'amélioration suivante :

$$\sigma(0) \rightarrow \sigma(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma(k) \rightarrow \sigma(k+1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma(M-1) \rightarrow \sigma(M) = \sigma(0).$$

Soit  $n(k) = (n_r(k))_{r \in R} = (n_1(k), n_2(k), \dots, n_m(k))$ , le vecteur de congestion associé au profil  $\sigma(k)$  pour tout  $0 \leq k \leq M$ . On peut, sans perte de généralité, réorganiser les indices de telle façon que  $d_1(n_1(1)) \leq \min_k d_r(n_r(k))$  pour toute stratégie  $r$  dans  $X$ , pour laquelle  $n_r(k)$  ( $0 \leq k \leq M$ ) n'est pas constant et que  $n_1(1) > n_1(0)$ . Cette dernière hypothèse implique que la première étape ( $\sigma(0) \rightarrow \sigma(1)$ ) correspond à la déviation vers certains joueurs  $i$  passant d'une certaine stratégie  $r$  à la stratégie 1. On a donc :  $\sigma_i(1) = 1$  et  $\sigma_i(0) = r \neq 1$  avec  $\sigma_i(1)$ , la stratégie de joueur 1 dans le profil de  $\sigma(1)$  et  $\sigma_i(0)$ , la stratégie de ce même joueur dans le profil  $\sigma(0)$ . On obtient ainsi  $d_1(n_1(1)) > d_r(n_r(0))$ , ce qui contredit l'hypothèse de la minimalité ci-dessus. ■

**Exemple 2.4.** Soit  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $R = \{a, b, c\}$  et la fonction d'utilité représentée par les préférences suivantes, supposées identiques sur l'ensemble des joueurs. (Pour simplifier, nous désignerons le couple  $(r, k)$  par  $rk$ ).

$$5c \prec 4c \sim 5a \prec 5b \prec 4b \sim 4a \prec 3a \prec 3b \sim 2b \prec 2a \sim 3c \prec a \prec 2c \prec c \prec b.$$

Utilisons à présent, les voies d'amélioration avec comme vecteur de congestion initial  $(5c)$ , puis améliorons ce point jusqu'à pouvoir trouver un point maximal.

$$(5c) \rightarrow (a, 4c) \rightarrow (2a, 3c) \rightarrow (\mathbf{2a}, \mathbf{b}, \mathbf{2c}).$$

Le profil de stratégies  $(2a, b, 2c)$  est un équilibre de Nash, car aucun des joueurs n'a intérêt à dévier. Nous remarquons en effet, que  $2a$  est un meilleur choix que  $2b$  ou  $3c$ , que  $b$  est meilleur que  $3a$  ou  $3c$ , et que  $2c$  est meilleur que  $3a$  ou  $2b$ . Évidemment, le mécanisme de la voie d'amélioration aboutit toujours à un équilibre de Nash dans le cas symétrique ceci en un temps polynômial et donc acceptable  $O(n^2 \times m)$ , avec  $n$  le nombre de joueurs et  $m$  le nombre de ressources).

**Remarque 2.1.** Dans cet exemple, on a  $n = 5$  et  $m = 3$ , et la convergence vers un équilibre de Nash sera assurée pour au plus 75 ( $5^2 \times 3$ ) étapes.

Nous prenons un autre exemple avec un grand nombre de joueurs.

**Exemple 2.5.** Considérons le jeu suivant  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $R = \{a, b, c, d\}$  et la fonction d'utilité ordinaire définie par :

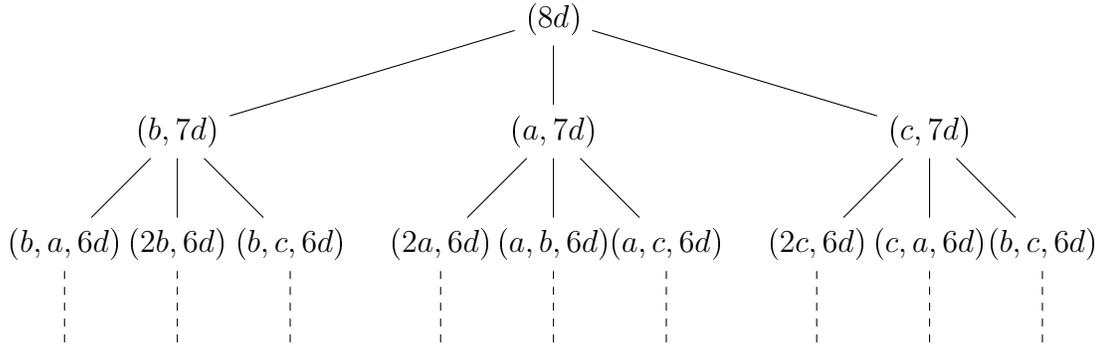
$8c \sim 8b \prec 8a \sim 8d \prec 7c \sim 7b \sim 6c \prec 7d \sim 5c \sim 4c \prec 3c \sim 6b \sim 6d \prec 5d \sim$   
 $5b \sim 4b \sim 7a \prec 5a \sim 4d \sim 6a \prec 4a \sim 3a \sim 3b \sim 2b \sim 3d \prec 2a \sim b \sim 2c \prec c \sim$   
 $2d \prec a \sim d.$

Nous appliquons le mécanisme de Milchtaich, en prenant par exemple le profil  $(8d)$  comme point initial, puis améliorons ce point jusqu'au point maximal.

$(8d) \rightarrow (b, 7d) \rightarrow (a, b, 6d) \rightarrow (a, b, c, 5d) \rightarrow (2a, b, c, 4d) \rightarrow \mathbf{(2a, b, 2c, 3d)}.$

Nous constatons que l'un des joueurs qui jouent dans le profil  $(8d)$  préfère améliorer son utilité en jouant  $b$ . Nous obtenons alors le profil  $(b, 7d)$ . Ensuite l'un des joueurs ayant choisi le bien  $d$  dans le profil  $(b, 7d)$ , améliore son utilité en choisissant  $b$ . On obtient ainsi le profil  $(a, b, 6d)$ , et ainsi de suite. Le dernier profil de cette voie est un point maximal puisque nous ne pouvons plus améliorer l'utilité d'aucun joueur. En effet, ce profil est un équilibre de Nash selon le processus de Milchtaich.

À la suite de cet exemple, nous pouvons nous poser la question suivante : si nous voulons avoir un autre point d'équilibre, quelles sont les possibilités d'amélioration, en partant de ce même profil de stratégies  $(8d)$  comme point de départ ? Pour répondre à cette question, nous allons construire un arbre qui couvre les possibilités d'amélioration à partir du profil  $(8d)$ .



Nous pouvons donc constater qu'il y a plusieurs possibilités d'amélioration, ce qui suggère que le temps de calcul de tous les équilibres en partant d'un point donné doit être très élevé.

Nous remarquons aussi que si l'on prenait un sous-arbre qui commence par  $(8d) \rightarrow (a, 7d)$ , au lieu d'un sous-arbre  $(8d) \rightarrow (b, 7d)$ , nous pouvons avoir le même équilibre que celui trouvé dans l'exemple 2.5. C'est-à-dire :

$$(8d) \rightarrow (a, 7d) \rightarrow (2a, 6d) \rightarrow (2a, c, 5d) \rightarrow (2a, 2c, 4d) \rightarrow \mathbf{(2a, b, 2c, 3d)}.$$

Nous concluons donc que deux voies d'amélioration différentes peuvent conduire au même point d'équilibre. À la lumière des exemples précédents, nous pouvons formuler les deux critiques suivantes :

1. Le principal inconvénient de la méthode de Milchtaich c'est qu'elle fournit un seul équilibre à la fois. Or dans certains cas, on peut avoir besoin d'obtenir tous les équilibres de Nash. Par exemple, quand il s'agit de sélectionner un équilibre de Nash Pareto optimal, ou simplement lorsqu'on souhaite comparer tous les équilibres entre eux (selon un critère donné).
2. Si nous voulons trouver tous les équilibres de Nash, en employant la méthode décrite par Milchtaich, nous devons réitérer le processus de la

voie d'amélioration (en partant à chaque fois d'un point initial différent). Comme le montre l'exemple précédent, le calcul peut alors nécessiter un temps exponentiel.

Notre but principal dans ce chapitre est d'améliorer l'analyse de Milchtaich dans le cas symétrique en proposant une formule simple et directe permettant de décrire tous les équilibres de Nash. Au-delà de sa simplicité, la formule que nous proposons présente les avantages suivants :

1. Quand la fonction d'utilité est strictement décroissante (lorsque l'ordre des préférences est strict), notre formule nous permet de trouver l'unique équilibre de Nash du jeu. Le calcul se fait alors en un temps linéaire par rapport au nombre de joueurs  $n$  et indépendant du nombre de ressources  $m$ .
2. Dans le cas général, c'est-à-dire, quand la fonction d'utilité comporte éventuellement des égalités (ce qui correspond à un ordre de préférences avec de possibles cas d'ex-aequo). Notre formule nous permet encore de trouver un équilibre qui ne soit pas nécessairement unique. Le temps de calcul est linéaire par rapport au nombre de joueurs  $n$  et indépendant du nombre de biens  $m$ . Ce qui constitue une amélioration du temps de calcul nécessaire à la méthode de Milchtaich  $O(n^2 \times m)$ .
3. La formule que nous proposons nous donne la possibilité de décrire, d'une manière très simple, tous les équilibres de Nash dans un jeu de congestion à choix unique symétrique.
4. La preuve de cette formule est à la fois simple et courte. En outre, elle n'utilise ni la propriété d'amélioration finie, ni la fonction de potentiel.

C'est à cette nouvelle formule et ses avantages que nous allons consacrer la dernière partie de ce chapitre.

## 2.3 Résultats : une formule pour décrire tous les équilibres de Nash

Contrairement à la démarche adoptée par Milchtaich basée sur la FIP, et qui procède par amélioration successive des profils de stratégies, nous présentons ici une méthode qui permet de trouver les équilibres de Nash en s'appuyant directement à la fonction d'utilité commune à tous les joueurs. Cette méthode est basée sur la notion suivante :

**Définition 2.3.** Soit  $\succsim$  un préordre complet sur  $R \times N$ . Une  $n$ -séquence (ou séquence des  $n$  derniers termes) extraite de  $\succsim$  est un ensemble  $T$  de  $R \times N$  tel que :

$$\bullet |T| = n \tag{1}$$

$$\bullet (r, k) \in T \Rightarrow ((r, k') \in T, \forall k' < k) \tag{2}$$

$$\bullet ((r, k) \in T \text{ et } (r', k') \notin T) \Rightarrow (r, k) \succsim (r', k') \tag{3}$$

Remarquons que, dans le cas d'un ordre strict, il n'y a qu'une seule  $n$ -séquence possible : celle composée des  $n$  derniers couples en partant du point maximal de cet ordre. En revanche, lorsque le préordre contient des indifférences, plusieurs  $n$ -séquences sont possibles. Pour illustrer cette définition, considérons les deux exemples suivants :

**Exemple 2.6.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les

préférences des joueurs soient décrites par l'ordre strict suivant :

$$5c \prec 4c \prec 5a \prec 5b \prec 4b \prec 4a \prec 3a \prec 3b \prec 2b \prec 2a \prec \underbrace{3c \prec a \prec 2c \prec c \prec b}.$$

Ici, dans cet exemple on a :  $n = 5$ . Par définition, il n'y a qu'une seule 5-séquence possible ; il s'agit de  $T = \{3c, a, 2c, c, b\}$ .

**Exemple 2.7.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  et  $R = \{a, b, c, d\}$ . L'ordre de préférence suivant (n'est pas nécessairement strict) :

$$\begin{aligned} &8c \sim 8b \prec 8a \sim 8d \prec 7c \sim 7b \sim 6c \prec 7d \sim 5c \sim 4c \prec 3c \sim 6b \sim 6d \prec 5d \sim \\ &5b \sim 4b \sim 7a \prec 5a \sim 4d \sim 6a \prec 4a \sim 3a \sim 3b \sim 2b \sim 3d \prec 2a \sim b \sim 2c \prec c \sim \\ &2d \prec a \sim d. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons exactement trois 8-séquences, à savoir :

$$T_1 = \{3d, 2a, b, 2c, c, 2d, a, d\};$$

$$T_2 = \{2b, 2a, b, 2c, c, 2d, a, d\};$$

$$T_3 = \{3a, 2a, b, 2c, c, 2d, a, d\}.$$

Notons que la séquence  $T_4 = \{3b, 2a, b, 2c, c, 2d, a, d\}$  n'est pas possible car elle ne contient pas  $2b$ ; et si on met  $2b$  dans la séquence, le nombre de termes devient 9 au lieu de 8. De même, la séquence  $T_5 = \{4a, 2a, b, 2c, c, 2d, a, d\}$  n'est pas possible puisque nous n'y retrouvons pas le terme  $3a$ .

### 2.3.1 Description de tous les équilibres de Nash

Le théorème suivant nous permet de déterminer tous les équilibres de Nash à partir de la séquence des  $n$  derniers termes.

**Théorème 2.3.1.** (Sbabou, Smaoui et Ziad). Soit  $\Gamma(N, R, \succsim)$  un jeu de congestion à choix unique symétrique, avec  $|N| = n$  et  $|R| = m$ . On a :

1. Un seul équilibre de Nash par  $n$ -séquence. Soit  $T$  une  $n$ -séquence de  $\succsim$ , l'équilibre de Nash correspondant est donné par :  $\sigma = ((1, \alpha_1), \dots, (m, \alpha_m))$ , où  $\alpha_j$  est le plus grand entier  $p$  qui satisfait  $(r_j, p) \in T$ .
2. Lorsque les préférences sont décrites par un ordre strict, le jeu  $\Gamma$  admet un seul équilibre de Nash.
3. Le nombre d'équilibres de Nash pour le jeu  $\Gamma$  est égal au nombre de  $n$ -séquences extraites de  $\succsim$ .

D'après ce théorème, il existe un équilibre de Nash par séquence. Cet équilibre s'obtient en prenant (dans la séquence des  $n$  derniers termes) pour chaque ressource, le nombre maximal de joueurs pouvant choisir cette ressource. Ainsi, il devient très facile d'établir la liste complète de tous les équilibres de Nash dans un jeu de congestion à choix unique symétrique.

**Preuve du théorème 2.3.1.** Il suffit de prouver le premier point, ainsi que le second et le troisième qui en découlent. Soit  $T$  une  $n$ -séquence et soit  $\sigma^* = ((1, \alpha_1), \dots, (m, \alpha_m))$  où  $\alpha_r = \max\{p : (r, p) \in T\}$ . Par définition de  $T$  et  $\sigma^*$ , on a  $\sum_{r=1}^m \alpha_r = n$ . En effet, la séquence  $T$  est constituée exclusivement des termes suivants :

$$(1, \alpha_1), \dots, (1, 1), (2, \alpha_2), \dots, (2, 1), \dots, (m, \alpha_m), \dots, (m, 1).$$

Ainsi,  $\sigma^*$  est un vecteur de congestion. De plus, pour tout  $r, r'$  dans  $R$ ,  $(r, \alpha_r) \succsim (r', \alpha_{r'} + 1)$  car,  $(r, \alpha_r) \in T$  et  $(r', \alpha_{r'} + 1) \notin T$ . Par conséquent,  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash.

Réciproquement, soit  $\sigma^* = ((1, \alpha_1), \dots, (m, \alpha_m))$  un équilibre de Nash. Il est facile de voir que  $T = \underbrace{\{(1, \alpha_1), \dots, (1, 1)\}}_{\text{1-séquence}}, \dots, \underbrace{\{(m, \alpha_m), \dots, (m, 1)\}}_{\text{m-séquence}}$  est une  $n$ -séquence. En effet, comme  $\sigma^*$  est un vecteur de congestion, on a  $\sum_{r=1}^m \alpha_r = n$  donc  $|T| = n$ . D'autre part, par définition de  $T$ ,  $(r, k) \in T \Rightarrow ((r, k') \in T, \forall k' < k)$ . Enfin, soit  $(r, k) \in T$  et  $(r', k') \notin T$ . On a :  $(r, k') \notin T$ , on a :  $k \preceq \alpha_r$  et  $k' \succ \alpha_{r'}$ . Comme  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash, on a  $(r, \alpha_r) \succeq (r', \alpha_{r'} + 1)$ . Par conséquent :  $(r, k) \succeq (r, \alpha_r) \succeq (r', \alpha_{r'} + 1) \succeq (r', k')$ . ■

**Remarque 2.2.** La preuve que nous avons suggérée contient implicitement un algorithme permettant de calculer tous les équilibres de Nash. Grâce à cet algorithme, le temps de calcul pour un seul équilibre de Nash devient linéaire  $O(n)$  ( $n$ , étant le nombre de joueurs) et indépendant de  $m$  (nombre de ressource). Ce qui constitue une amélioration par rapport en temps polynômial  $O(n^2 \times m)$  nécessaire au mécanisme proposé par Milchtaich (voir la sous-section 2.3.2).

Pour illustrer le théorème 2.3.1, et en continuant avec les mêmes exemples précédents, nous montrerons comment parvenir facilement à déterminer tous les équilibres de Nash, grâce à la méthode que nous venons de vous proposer.

**Exemple 2.8.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que la fonction d'utilité est présentée par l'ordre strict suivant (l'ordre de préférence est strict) :

$$5c \prec 4c \prec 5a \prec 5b \prec 4b \prec 4a \prec 3a \prec 3b \prec 2b \prec 2a \prec \underbrace{3c \prec a \prec 2c \prec c \prec b}$$

Ici, nous avons une unique 5-séquence :  $T = \{b, c, 2c, a, 3c\}$ . Pour chaque

ressource, nous retenons le plus grand entier qui apparaît dans  $T$ . Nous obtenons alors l'unique équilibre de Nash :  $\sigma^* = (a, b, 3c)$ .

**Exemple 2.9.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  et  $R = \{a, b, c, d\}$ . Nous présentons un ordre de préférence qui comporte des indifférences :

$$8c \sim 8b \prec 8a \sim 8d \prec 7c \sim 7b \sim 6c \prec 7d \sim 5c \sim 4c \prec 3c \sim 6b \sim 6d \prec 5d \sim 5b \sim 4b \sim 7a \prec 5a \sim 4d \sim 6a \prec 4a \sim 3a \sim 3b \sim 2b \sim 3d \prec 2a \sim b \sim 2c \prec c \sim 2d \prec a \sim d.$$

Directement, voici toutes les séquences de 8 derniers termes ainsi que les équilibres de Nash correspondants, qui s'écrivent comme suit :

$$T_1 = \{d, a, 2d, c, 2c, b, 2a, 3d\} \rightarrow \sigma_1^* = (2a, b, 2c, 3d);$$

$$T_2 = \{d, a, 2d, c, 2c, b, 2a, 2b\} \rightarrow \sigma_2^* = (2a, 2b, 2c, 2d);$$

$$T_3 = \{d, a, 2d, c, 2c, b, 2a, 3a\} \rightarrow \sigma_3^* = (3a, b, 2c, 2d).$$

Le jeu admet donc exactement trois équilibres de Nash qui peuvent être facilement explicités.

**Remarque 2.3.** D'après le théorème 2.3.1, nous voyons évidemment que le nombre d'équilibres de Nash est égal au nombre de  $n$ -séquences.

Notons que pour le cas non-symétrique, le théorème 2.3.1 ne fonctionne pas. L'exemple suivant illustre ce fait.

**Exemple 2.10.** Soient  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les utilités des joueurs soient données par :

$$3a \prec_1 3b \prec_1 2 \prec_1 3c \prec_1 2b \prec_1 a \prec_1 b \prec_1 2c \prec_1 c.$$

$$3c \prec_2 2c \prec_2 3b \prec_2 c \prec_2 2b \prec_2 3a \prec_2 b \prec_2 2a \prec_2 a.$$

$$3c \prec_3 3a \prec_3 2a \prec_3 2c \prec_3 3b \prec_3 c \prec_3 2b \prec_3 b \prec_3 a.$$

La notion de séquence de  $n$  derniers termes ne peut pas s'appliquer dans le cas présent car, nous avons trois fonctions d'utilités différentes. Pour le joueur 1, nous avons la séquence  $b \prec_1 2c \prec_1 c$ , pour le joueur 2 :  $b \prec_2 2a \prec_2 a$  et pour le joueur 3 :  $2b \prec_3 b \prec_3 a$ . Si on applique le théorème précédent à ces séquences, on obtient les trois vecteurs de congestion suivants :  $(b, 2c)$ ,  $(b, 2a)$  et  $(2b, a)$ . Aucun de ces trois vecteurs de congestion ne convient simultanément aux trois joueurs. On peut alors penser à prendre le dernier terme de chacune des trois fonctions d'utilités. On obtient ainsi, le profil de stratégies  $(c, a, a)$ . Mais on peut vérifier aisément qu'il ne correspond pas à un équilibre de Nash. Néanmoins, il existe un équilibre de Nash  $(c, a, b)$ .

Par cet exemple, il est intéressant de se poser la question suivante : comment peut-on trouver un ou plusieurs équilibre(s) de Nash dans les jeux de congestion à choix unique non symétriques ? La réponse à cette question sera donnée dans le chapitre suivant.

### 2.3.2 Algorithme et complexité : jeu de congestion à choix unique symétrique

Fabrikant, Papadimitriou et Talwar [22] ont étudié la complexité du calcul d'un équilibre de Nash dans les jeux de congestion (standard), et ont montré que ce problème appartient à la classe PLS-complète. Cependant, Samuel

Jeong et al [32] ont prouvé que cette complexité de ce problème est bien polynomiale pour la recherche d'un équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique symétriques. Plus précisément, ils montrent que, pour tous jeux appartenant à cette famille particulière de jeux de congestion, le mécanisme d'amélioration (par meilleure réponse) converge vers un équilibre de Nash en un temps polynomial d'ordre  $O(n^2 \times m)$ . Il est important de noter que, contrairement à la définition donnée dans ce chapitre, Jeong et al [32] n'imposent pas l'hypothèse de monotonie aux fonctions de paiements dans les jeux de congestion à choix unique symétriques.

Dans ce qui suit, nous proposons une base d'algorithme qui permet d'améliorer cette complexité et de la réduire à un temps d'ordre  $O(n \times m)$  pour la recherche d'un seul équilibre de Nash. En fait, cet algorithme est plus général : il permet de lister tous les équilibres de Nash. Dans ce cas, il est connu que le temps de calcul peut devenir exponentiel. Cependant, s'il le nombre de biens est réduit (ou si on fixe une borne supérieure à ce nombre), le calcul peut se faire en un temps raisonnable.

Soit  $\Gamma(N, R, \succsim)$  un jeu de congestion à choix unique symétrique où la fonction d'utilité est représentée par un ordre faible  $\succsim$  sur l'ensemble  $R \times N$ . Le programme suivant donne une description des étapes de recherche d'un ou plusieurs équilibre(s) de Nash.

---

## Programme

**ENTREE** : Liste des listes représentant l'ordre faible  $\succsim$  et telle que  $\biguplus P_i = N \times R$ , avec  $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$  et  $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$

**SORTIE** : Les équilibres de Nash  $\sigma^*$

---

Le but de l'algorithme suivant est de trouver les  $n$ -séquences possibles, lesquelles nous permettrons en appliquant la procédure 1, de détecter quels sont les équilibres de Nash. Lorsque la fonction d'utilité comporte des indifférences, les éléments qui peuvent être acceptés dans les  $n$ -séquences seront ceux qui respectent les conditions annoncées dans la définition 2.3. Après avoir parcouru les listes qui comportent  $(n \times m)$  termes, l'algorithme filtre les termes qui contiennent des indifférences et construit les  $n$ -séquences d'où nous pouvons extraire les équilibres de Nash.

---

### **Algorithme**

// Paquets complets

*count* = 0 ; *l* = 1

**Tant que** (*count* =  $n \times m$ ) **Faire**

*count*+ =  $P_l$

*l* ++

**Fin de tant que**

**Pour** *l* le paquet à considérer

*S* = *Filter*( $P_l$ )

// Trier et enlever  $(r, k)$  si  $\nexists (r, k'), \forall k' < k$  et  $\forall k, k' \in N$

**Fin pour**

$\sigma^* = \text{ExtraireNE} [T = (\bigcup_{j=1}^{l-1} P_j) \cup S]$  en utilisant la procédure

Imprimer  $\sigma^*$

---

**Procédure 1** : *Extraire les équilibres de Nash* ( $T = (T_1, \dots, T_n)$ )

int  $max[m]$

**Pour**  $r = 1$  à  $m$

$max[r] = 0$

**Pour**  $i = 1$  à  $n$  **Faire**

**Si**  $T_{r,i} > max[T_{r,i-1}]$  **Alors**

$max[T_{r,i-1}] = T_{r,i}$

**Fin si**

**Fin pour**

**Fin pour**

Retourner  $max$

---

Le temps de complexité de l'algorithme ci-dessus (c'est-à-dire, le temps nécessaire à l'intention du résultat recherché) est proportionnel, sur une entrée particulière, au nombre d'opérations ou d'étapes exécutées. Plus spécifique-

ment, notre algorithme achève le calcul en temps linéaire  $O(n \times m)$ . Ceci provient du fait que nous pouvons traverser la liste nécessaire en  $O(n)$ , nous pouvons filtrer les éléments aussi en temps  $O(n)$ , trouver l'élément maximal en  $O(n \times m)$ , et enfin extraire les équilibres de Nash en  $(n \log n)$  opérations. Par conséquent, le temps de complexité de l'algorithme est :

$$O(n) + O(n) + O(n \times m) + O(n \log n) = O(n \times m), \text{ pour } \log n < m.$$

**Exemple 2.11.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  et  $R = \{a, b, c, d\}$ . L'ordre de préférence suivant (n'est pas nécessairement strict) :

$$\begin{aligned} &8b \sim 8c \prec 7c \sim 6c \sim 8d \prec 8a \sim 7b \prec 7d \sim 7a \sim 6a \sim 6d \prec 5a \sim 6b \sim \\ &5d \prec 5c \sim 5b \sim 4d \sim 3d \sim 4c \prec 4b \sim 4a \sim 3c \prec 2d \sim d \sim 3b \sim 2b \sim 3a \sim \\ &2a \prec 2c \sim c \prec b \sim a. \end{aligned}$$

Appliquons l'algorithme ci-dessus sur l'exemple. Considérons une liste d'éléments respectant l'ordre faible  $\preceq$ , qui contient des listes avec des termes indifférents.

11	$(8, c) \sim (8, b)$
10	$(8, d) \sim (6, c) \sim (7, c)$
9	$(7, b) \sim (8, a)$
8	$(6, d) \sim (6, a) \sim (7, a) \sim (7, d)$
7	$(5, d) \sim (6, b) \sim (5, a)$
6	$(5, d) \sim (6, b) \sim (5, b) \sim (5, c)$
5	$(4, c) \sim (3, d) \sim (4, d) \sim (5, b) \sim (5, c)$
4	$(3, c) \sim (4, a) \sim (4, b)$
3	$(2, a) \sim (3, a) \sim (2, b) \sim (3, b) \sim (1, d) \sim (2, d)$
2	$(1, c) \sim (2, c)$
1	$(1, a) \sim (1, b)$

Dans un premier temps, nous pouvons constater que l'algorithme calcule les  $n \times m$  termes  $((1, b), (1, a), (2, c), (1, c), (2, d), (1, d), \dots, (8, b), (8, c))$ , afin de construire l'ordre des préférences. Nous remarquons que la première liste contient deux listes  $((1, b)$  et  $(1, a))$ , la deuxième comporte deux listes  $((2, c)$  et  $(1, c))$ , et ainsi de suite. Puis, l'algorithme filtre les profils indifférents et accepte ceux qui respectent les conditions citées dans la définition 2.3. Dans notre exemple, il filtre les  $((2, a), (3, a), (2, b), (3, b), (1, d), (2, d))$  et on remarque qu'il peut les accepter tous. Cependant, chaque  $n$ -séquence sera l'union des quatre termes parmi ces derniers (qui respectent toujours la définition 2.3) avec les deux listes précédentes. En effet, nous avons :

$$T_1 = \{d, a, c, 2c, 2a, 3a, 2b, 3b\}$$

$$T_2 = \{d, a, c, 2c, 2a, 3a, 2b, d\}$$

$$T_3 = \{d, a, c, 2c, 2a, 2b, 3b, d\}$$

$$T_4 = \{d, a, c, 2c, 2a, 2b, d, 2d\}$$

$$T_5 = \{d, a, c, 2c, 2b, 3b, d, 2d\}$$

Enfin, en utilisant la procédure 1 nous pouvons prendre le maximum de chaque terme dans les  $n$ -séquences ci-dessus, afin d'extraire les équilibres de Nash correspondants.

$$\sigma_1^* = (3a, 3b, 2c)$$

$$\sigma_2^* = (3a, 2b, 2c, d)$$

$$\sigma_3^* = (2a, 3b, 2c, d)$$

$$\sigma_4^* = (2a, 2b, 2c, 2d)$$

$$\sigma_5^* = (a, 3b, 2c, 2d)$$

## 2.4 Conclusion

Les résultats de ce chapitre apportent des réponses à la plupart des questions concernant les équilibres de Nash dans le cas symétrique des jeux de congestion à choix unique. Notre étude de ce cas peut être considérée comme étant complète dans le sens où elle mène à une description exhaustive de tous les équilibres. Le passage du contexte cardinal au contexte ordinal nous a permis de simplifier l'analyse de ce type de jeux. Avec le recours à la notion de séquence, nous avons pu restreindre la recherche des équilibres de Nash aux  $n$  derniers termes de l'ordre ou du préordre représentant la fonction d'utilité commune à tous les joueurs. Cette restriction est importante pour deux raisons. D'un côté, elle conduit à une preuve très simple de l'existence des

équilibres de Nash dans le cas symétrique, sans faire appel ni à la fonction de potentiel et ni à la FIP (Finite Improvement Path). D'un autre côté, elle rend la description totalement indépendante du nombre des ressources mises à la disposition des joueurs. En effet, la formule obtenue, ne faisant intervenir que les  $n$  derniers termes de l'ordre de préférence, elle s'applique aussi facilement à des situations simples (avec un nombre réduit de ressources) qu'à des configurations plus complexes impliquant un très grand nombre de biens.

## Chapitre 3

# Équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique : le cas non symétrique

Les résultats présentés dans le chapitre précédent concernent le cas symétrique des jeux de congestion à choix unique. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux jeux de congestion à choix unique non symétriques, aussi appelés "jeux de congestion avec fonctions de paiements spécifiques" : les joueurs sont toujours restreints à choisir un seul bien, mais ils ont chacun leur propre fonction d'utilité. L'objectif principal de ce chapitre est de réexaminer l'analyse de Milchtaich [41] de ce type de jeu, en simplifiant les preuves et en complétant l'étude de certains cas particuliers. Nous commençons par présenter les différents résultats obtenus par Milchtaich : le cas de deux biens, le cas de deux joueurs et le cas général. Nous verrons alors, que la propriété d'amélioration finie n'est plus vérifiée dès lors qu'il y a trois biens ou plus. Dans sa preuve (de l'existence d'un équilibre de Nash dans le cas non symétrique), Milchtaich a utilisé une version modifiée de la FIP, à savoir la propriété d'amélioration avec meilleure réponse. L'étude que nous proposons ici ne fera appel ni à la fonction de potentiel ni à la propriété d'amélioration avec meilleure réponse.

Comme dans le chapitre 2, nous basons notre analyse sur la restriction des fonctions d'utilité à leurs derniers termes. En adaptant cette approche, nous allons d'abord examiner le cas de deux biens. Nous considérons ensuite une situation particulière où les fonctions d'utilité des joueurs vérifient une condition que nous qualifions de "partition exacte". Dans tous ces cas particuliers, nous serons en mesure de décrire tous les équilibres de Nash d'un jeu de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques. Enfin, le cas général sera traité dans la dernière partie de ce chapitre où nous présenterons une preuve alternative à celle de Milchtaich, à la fois plus simple et plus courte.

### 3.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà signalé, les jeux de congestion admettent plusieurs applications dans des domaines tels que : l'économie, les trafics routiers, l'écologie, etc. Par ailleurs, il nous a semblé intéressant d'évoquer dans cette introduction quelques expériences conduites par des économistes sur le comportement d'animaux mis dans des conditions modélisables par des jeux de congestion. Milinsky [43] a réalisé une étude expérimentale sur les comportements de six poissons (individus) dispatchés d'une façon égale entre les deux moitiés d'un aquarium, au moment de la distribution de la nourriture des deux côtés du même aquarium. Les résultats de cette expérience montrent qu'aucun individu ne pourrait avoir plus de nourriture en se déplaçant vers l'autre moitié de l'aquarium. Il s'agit là d'un équilibre de Nash, mais aussi d'un exemple d'une stratégie évolutionnaire stable (evolutionary stable strategy (ESS)) de

Maynard [40]<sup>1</sup> ou plus spécifiquement d'une distribution libre idéale (ideal free distribution (IFD)) de Fretwell et Lucas [26]<sup>2</sup>. En d'autres termes, lorsque les individus sont libres de se déplacer vers n'importe quel côté de l'aquarium sur une base d'égalité avec les autres individus, le principe de IFD est présent lorsque chaque individu s'installe dans la pièce la plus adaptée à ses besoins pour survivre ou se reproduire<sup>3</sup>. Dans ce cas, la question qui se pose est celle de l'existence d'un équilibre de Nash. Les résultats de cette étude suggèrent qu'un tel équilibre existe. Autrement dit, une attribution d'équilibre des individus aux pièces, devrait exister pour n'importe quel nombre d'individus et n'importe quel nombre de pièces, à condition que, dans chaque pièce, les individus aient des quantités d'alimentation égales. Ce résultat se tient même si les pièces contiennent des quantités d'alimentation différentes, et même si les individus ont des préférences différentes. Cependant, si ces individus se distinguent également par leur quantité d'alimentation relative, et s'il y a plus de deux pièces, alors un équilibre de Nash ne peut exister. Les différences individuelles dans la capacité concurrentielle ou en position dominante ont été observées, en vertu de l'ensemble des conditions expérimentales analogues, chez les épinoches (Milinsky [44]), les poissons cichlidés (Godin et Keenleyside [28]), les canards colverts (Harper [29]), et chez le poisson rouge (Sutherland et *al* [73]). Ces différents comportements individuels ont un impact sur les

---

1. Une stratégie évolutionnaire stable (ou "evolutionary stable strategy" ESS) est une stratégie adoptée par la majorité et empêchant qu'une population soit envahie par un "mutant" qui recourrait à une stratégie différente [40].

2. La théorie de la distribution libre idéale ("Ideal Free Distribution", IFD) est une théorie qui prédit que tous les individus se distribuent dans leur habitat de telle manière qu'ils puissent maximiser leur utilité, à condition qu'ils soient libres de leurs déplacements, sans coût ajouté. Cette théorie implique aussi que tous les individus aient une connaissance parfaite de la disponibilité alimentaire de tous les habitats et qu'ils soient tous équivalents en terme d'efficacité alimentaire, compétition, etc [26].

3. Pour plus de détails sur le choix des individus, voir l'article de Milinsky et Parker [45].

récompenses obtenus, puisque chaque catégorie d'individus a un poids différent de celui des autres catégories. Il est intéressant de noter que ces diverses observations expérimentales correspondent largement aux résultats théoriques relatifs à l'existence (ou non) d'un équilibre de Nash dans différents types de jeux de congestion à choix unique. Nous avons déjà présenté et étudié le cas symétrique où les joueurs partagent la même fonction d'utilité.

Dans la section suivante, nous présentons l'analyse de Milchtaich [41] du cas non symétrique. Cette analyse est basée sur l'idée que les joueurs peuvent réagir aux stratégies jouées par les autres joueurs en déviant vers les stratégies de meilleure réponse (best-reply). Il s'agit alors de savoir si un tel mécanisme converge toujours vers un équilibre de Nash. Signalons que le cas des "jeux de congestion pondérés" (voir Milchtaich [41]) ne sera pas abordé dans cette thèse. Nous nous contentons simplement de souligner que ce type de jeux ne possède pas toujours un équilibre de Nash (voir Milchtaich [41]). Lorsque l'équilibre existe, les joueurs peuvent atteindre un équilibre par une sorte de processus d'adaptation (voir, par exemple, Kandori et al [34], et Young [78]).

## 3.2 Cas non symétrique

Dans ce type de jeu, les joueurs ont des fonctions d'utilité différentes. De ce fait, nous ne pouvons pas confondre le profil de stratégies et le vecteur de congestion, car il est important d'identifier le choix de chaque joueur. Le but de cette section est de mettre la lumière sur la notion de la propriété d'amélioration finie, et de présenter les différents résultats de Milchtaich [41]. Nous

verrons alors qu'un jeu de congestion (non symétrique) possède la propriété d'amélioration finie seulement dans le cas de deux stratégies. En effet, Milchtaich a constaté que cette propriété ne peut être vérifiée en présence de trois stratégies ou plus. Cependant, en modifiant cette propriété, il a pu établir son résultat principal montrant l'existence d'un équilibre de Nash dans les jeux de congestion avec des fonctions de paiements spécifiques.

Notons que, dans notre présentation des résultats de Milchtaich, nous employons la description ordinale des fonctions d'utilité des joueurs, contrairement à cet auteur qui utilise l'approche cardinale des fonctions d'utilité.

### 3.2.1 Cas de deux stratégies

Les jeux de congestion non symétriques (à choix unique) n'admettent pas généralement de fonction de potentiel exact [41]. Néanmoins, dans le cas particulier de deux stratégies ( $r = 2$ ). Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** *(Milchtaich [41]) Tout jeu de congestion avec deux stratégies possède la propriété d'amélioration finie.*

**Preuve.** Considérant un jeu de congestion non symétrique (à choix unique) avec un ensemble de deux biens,  $R = \{a, b\}$ . Supposons que ce jeu ne vérifie pas la propriété d'amélioration finie. Il y a donc une voie d'amélioration infinie :  $\sigma(0), \sigma(1), \dots$ , etc. Comme l'ensemble de biens et le nombre de joueurs sont finis, alors toute voie d'amélioration infinie doit comporter des répétitions.

On peut supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un certain  $M > 1$  tel que :  $\sigma(0) = \sigma(M)$ . Alors, on obtient la voie d'amélioration suivante :

$$\sigma(0) \rightarrow \sigma(1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma(k) \rightarrow \sigma(k+1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma(M-1) \rightarrow \sigma(M) = \sigma(0)$$

Soit  $n(\sigma(k)) = (n_a(k), n_b(k))$  avec  $n_a(k)$  (resp.  $n_b(k)$ ) le nombre de joueurs qui jouent  $a$  (resp.  $b$ ) dans le profil  $\sigma(k)$ , pour tout  $k$  ( $0 \leq k \leq M$ ). On a  $n_a(k) + n_b(k) = n$ . Quitte à renuméroter des profils de stratégies dans cette voie d'amélioration, on peut supposer que  $n_b(1) = \max_k n_b(k)$ .

On a alors obligatoirement  $n_b(1) \succ n_b(0)$ . En d'autres termes, un joueur  $i$  dévie de  $\sigma(0)$  à  $\sigma(1)$  (c'est-à-dire, que ce joueur a changé de  $a$  vers  $b$ ). De plus, on a :

$$n_b(1) \succ_i n_a(1) + 1$$

Comme on a  $n_b(1) = \max_k n_b(k)$  et  $n_a(1) + n_b(1) = n$ , on a obligatoirement  $n_a(1) = \min_k n_a(k)$ . On a donc  $n_b(1) \succ_i n_a(1) + 1$  (puisque un joueur  $i$  dévie de  $\sigma(0)$  à  $\sigma(1)$  en jouant  $b$ ),  $n_b(1) = \max(n_b(k))$  et  $n_a(1) = \min(n_a(k))$ . En utilisant la décroissance des fonctions d'utilité en fonction de nombre de biens, on obtient :

$$n_b(k) \succ_i n_a(k) + 1, \forall k \geq 1.$$

Ceci montre que le joueur  $i$  ne peut plus dévier de  $b$  vers  $a$  à l'étape  $\sigma(k) \rightarrow \sigma(k+1)$ , car sinon on aurait :

$$n_a(k) + 1 \succ_i n_b(k)$$

Or, ceci est impossible, car on a supposé que la voie était infinie et qu'elle revienne au point de départ de  $\sigma(0)$ . ■

La conséquence directe du théorème précédent est que tout jeu de congestion non symétrique à choix unique avec deux biens possède (au moins) un

équilibre de Nash. En effet, comme nous l'avons déjà souligné, tout jeu vérifiant la FIP admet nécessairement un équilibre de Nash. Ainsi, la preuve de l'existence d'un équilibre de Nash dans ce cas est basée sur la FIP. On peut alors se demander si ce résultat est généralisable à un nombre quelconque de biens, c'est-à-dire, pour  $R \succeq 3$ .

**Remarque 3.1.** Dans toute la suite de ce chapitre, nous allégeons la terminologie : lorsque n'y a aucune confusion à craindre, les jeux de congestion à choix unique non symétriques seront appelés simplement "jeux de congestion".

### 3.2.2 Jeux sans la propriété d'amélioration finie

Dans ce paragraphe, nous allons analyser les jeux de congestion (non symétriques), qui ne possèdent pas la FIP. C'est-à-dire, que dans ces jeux, il existe des voies d'amélioration cycliques.

Milchtaich [41] a démontré, par des exemples simples, que ces jeux peuvent ne pas vérifier la FIP. En effet, des fonctions d'utilité différentes et un nombre de stratégies supérieures ou égales à trois, peuvent n'amener qu'à des voies d'amélioration cycliques. Comme le montre l'exemple suivant, même un jeu à deux joueurs peut donner lieu à une voie d'amélioration infinie (cyclique).

**Exemple 3.1.** Soit  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  avec  $N = \{1, 2\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les fonctions d'utilité ordinales de deux joueurs soient données par :

$$2a \prec_1 2c \prec_1 c \prec_1 2b \prec_1 b \prec_1 a.$$

$$2b \prec_2 2c \prec_2 c \prec_2 2a \prec_2 a \prec_2 b.$$

Considérons maintenant la voie d'amélioration suivante :

$$(c, b) \rightarrow (b, b) \rightarrow (b, c) \rightarrow (a, c) \rightarrow (a, a) \rightarrow (c, a) \rightarrow (c, b) \rightarrow \dots$$

Comme on peut le constater, cette voie est une voie d'amélioration constituant un cycle de six profils de stratégies, commençons par le profil  $(c, b)$ , retournant à ce point de départ, et ainsi de suite. Il est à noter que l'existence d'un tel cycle montre que ce jeu n'admet pas de fonction de potentiel ordinal généralisé (d'après le corollaire 1.3.5 du chapitre). Cependant, on vérifie facilement que les profils  $(a, b)$  et  $(b, a)$  correspondent à des équilibres de Nash.

Nous pouvons maintenant présenter une version modifiée de la FIP, à savoir la propriété d'amélioration avec meilleure réponse ayant été utilisée par Milchtaich [41] pour trouver un ou plusieurs équilibres de Nash dans les jeux de congestion. À chaque étape de déviation vers une stratégie désignée comme la meilleure réponse contre les stratégies jouées par les autres joueurs, les voies sont appelées "voies de meilleures réponses". En ce sens, les joueurs dévient seulement lorsque la stratégie qu'ils jouent ne constitue pas une stratégie de meilleure réponse. Une telle voie représente une "voie d'amélioration de meilleure réponse". Cependant, la propriété d'amélioration finie correspond aux voies d'amélioration de meilleure réponse ainsi qu'à la propriété de meilleure réponse finie (the finite best-reply property (FBRP)), mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Dans l'argument suivant, Milchtaich [41] montre qu'il existe au moins un équilibre de Nash dans les jeux de congestion possédant des voies d'amélioration infinie de meilleure réponse et minimum trois joueurs. C'est-à-dire, qu'à chaque étape de déviation, un seul joueur  $i$  change sa stratégie en déviant vers une autre stratégie  $r$ . Par conséquent, le second joueur est affecté négati-

tivement par le changement de joueur  $i$ . Ce qui implique que le paiement du deuxième joueur soit réduit s'il joue aussi la stratégie  $r$ . En d'autres termes, aucun joueur ne peut augmenter son paiement indéfiniment. Si seulement deux joueurs sont impliqués alors, c'est le deuxième joueur qui va dévier vers l'étape suivante, c'est-à-dire le changement de la stratégie  $r$  jouée par  $i$  à une stratégie de meilleure réponse. Comme cela peut entraîner une diminution de  $n_r$ , la stratégie  $r$  reste la meilleure réponse pour joueur  $i$ , et donc l'équilibre de Nash est atteint.

**Exemple 3.2.** Soient  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les fonctions d'utilité ordinales des trois joueurs soient définies par :

$$\begin{aligned} 3a \prec_1 2a \prec_1 a \prec_1 3c \prec_1 3b \prec_1 2c \prec_1 2b \prec_1 b \prec_1 c. \\ 3b \prec_2 2b \prec_2 b \prec_2 3c \prec_2 3a \prec_2 2a \prec_2 2c \prec_2 c \prec_2 a. \\ 3c \prec_3 2c \prec_3 c \prec_3 3a \prec_3 3b \prec_3 2b \prec_3 2a \prec_3 a \prec_3 b. \end{aligned}$$

Soit la voie d'amélioration suivante :

$$(b, a, a) \rightarrow (c, a, a) \rightarrow (c, c, a) \rightarrow (c, c, b) \rightarrow (b, c, b) \rightarrow (b, a, b) \rightarrow (b, a, a) \rightarrow \dots$$

Puisque l'on remarque que cette voie est une voie d'amélioration avec meilleure réponse de stratégie contenant un cycle de six profils de stratégies, commencer par le profil  $(b, a, a)$ , revient par conséquent à revenir sur ce même profil. En effet, ce jeu ne possède pas la FBRP et n'admet pas la fonction de potentiel ordinal généralisé. Néanmoins, il admet deux équilibres de Nash :  $(c, a, b)$  et  $(b, c, a)$ .

Notons que cet exemple peut-être impliqué pour un jeu en général, c'est un jeu où les stratégies et les fonctions de paiements sont différentes. En effet,

Milchtaich a montré qu'un jeu de congestion en général avec des inégalités entre les fonctions d'utilité, présente des conditions nécessaires pour avoir une voie infinie de meilleure réponse. Cependant, toutes les voies infinies de meilleure réponse contiennent une voie finie, suivie d'une répétition sans fin d'un cycle de six profils de stratégies ayant la même forme indiquée aux exemples précédents.

### 3.3 Existence d'un équilibre de Nash dans les jeux de congestion

**Théorème 3.3.1.** *(Milchtaich [41]) Tout jeu de congestion fini possède un équilibre de Nash en stratégies pures.*

Pour démontrer ce théorème, il s'agit essentiellement d'établir le lemme suivant.

La partie (1) du lemme concerne les voies d'amélioration avec meilleure réponse. La partie (2) concerne un cas particulier des voies d'amélioration avec meilleure réponse : le joueur qui dévie se déplace toujours vers l'ancienne position du déviateur qui l'a précédé.

**Lemme 3.3.2.** *(1) Si  $r(0), r(1), \dots, r(M)$  est une séquence de stratégies,  $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(M)$  est une voie d'amélioration avec meilleure réponse, et le résultat de  $\sigma(k-1)$  à  $\sigma(k)$  par la déviation d'un joueur passant de  $r(k-1)$  à  $r(k)$  avec ( $k = \{1, 2, \dots, M\}$ ) alors,  $M \leq n$  (avec  $n$  le nombre de joueurs).*

*(2) De même, si la déviation dans la  $k^{\text{ème}}$  étape est à partir de  $r(k)$  vers  $r(k-1)$  (avec  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ ), alors  $M \leq n \cdot (m-1)$  (avec  $m$  le nombre de stratégies).*

Avant de donner la preuve de ce résultat, prenant un exemple pour illustrer les situations concernées par le lemme.

**Exemple 3.3.**  $N = \{1, 2, 3\}$  et  $R = \{a, b, c, d\}$ . Supposons que  $r(0) = b$ ,  $r(1) = c$ ,  $r(2) = a$  et  $r(3) = d$ . Un exemple des situations concernées par la partie (1) du lemme est :

$$\sigma(0) = (a, \mathbf{b}, b) \rightarrow \sigma(1) = (a, \mathbf{c}, b) \rightarrow \sigma(2) = (a, \mathbf{a}, b) \rightarrow \sigma(3) = (\mathbf{d}, a, b).$$

Comme on peut le voir, le passage de  $\sigma(0) \rightarrow \sigma(1)$  résulte d'une déviation (ici, du joueur 2) du  $r(0)$  vers  $r(1)$ . De même, le passage de  $\sigma(1) \rightarrow \sigma(2)$  résulte d'une déviation (toujours du joueur 2) du  $r(1)$  à  $r(2)$ . Le passage de  $\sigma(2) \rightarrow \sigma(3)$  résulte d'une déviation (ici, du joueur 1) du  $r(2)$  à  $r(3)$ .

Les situations concernées par la partie (2) du lemme sont du type :

$$\sigma(0) = (\mathbf{b}, c, a) \rightarrow \sigma(1) = (a, \mathbf{c}, a) \rightarrow \sigma(2) = (a, \mathbf{b}, a) \rightarrow \sigma(3) = (a, b, \mathbf{c}).$$

Ici, dans le passage de  $\sigma(1) \rightarrow \sigma(2)$ , le déviateur (ici, le joueur 2) passe de  $r(1)$  à  $r(0)$  ; c'est-à-dire qu'il dévie vers l'ancienne position du déviateur précédent (à ce niveau, c'est le joueur 1 qui a dévié de  $b$  vers  $a$ ). Autrement dit, le joueur 2 a pris la stratégie abandonnée par le joueur 1.

**Preuve.** (1). Soit  $(n_1(k), n_2(k), \dots, n_m(k))$  le vecteur de congestion correspondant à  $\sigma(k)$  avec  $(0 \leq k \leq M)$  et  $(n_r)_{\min} = \min_k n_r(k)$  avec  $(1 \leq r \leq m)$ . On a alors :  $(n_r)_{\min} \leq n_r(k) \leq (n_r)_{\min} + 1, \forall r$  et  $k$ . Par conséquent, dans la déviation vers  $r(k)$ , l'unique déviateur porte  $n_r(k)$  à son maximum et les autres  $n_r$  à leurs minimums. Puis, par la monotonie des fonctions d'utilité, la stratégie  $r(k)$  reste la meilleure réponse pour ce joueur dans toutes les étapes

suivantes. Ainsi, chaque joueur dévie au plus une fois. Le nombre d'étapes est donc inférieur au nombre de joueur, autrement dit,  $M \leq n$ .

(2). De même, on a  $(n_r)_{min} \leq n_r(k) \leq (n_r)_{min} + 1, \forall r$  et  $k$ . Ainsi, en déviant à partir de  $r(k)$ , l'unique déviateur dans la  $k^{\text{ème}}$  étape apporte  $n_r(k)$  à son minimum. Ceci, implique que son utilité dans  $\sigma(k)$  est non seulement plus grande que dans  $\sigma(k - 1)$  (par définition de la meilleure réponse de voie d'amélioration) mais également plus grande que son utilité quand il a dévié à  $r(k)$ , s'il la fait, ou l'utilité qu'il obtiendra en déviant à  $r(k)$ . Par conséquent, un joueur ne reviendra pas à une stratégie vers laquelle il l'a dévié. Ainsi, chaque joueur dévie au plus  $(m - 1)$  fois. ■

Afin de bien comprendre cette preuve, considérant l'exemple suivant :

**Exemple 3.4.** Soit un jeu avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons  $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)$  soient les profils de stratégies suivants :

$\sigma(0) = (a, a, a, a, c, c)$ ,  $\sigma(1) = (a, b, a, a, c, c)$ ,  $\sigma(2) = (a, b, a, c, c, c)$  et  $\sigma(3) = (a, b, a, c, b, c)$ . Ainsi, les vecteurs de congestion de chaque profil de stratégies sont donnés par :

$$n(\sigma(0)) = (n_a(0), n_b(0), n_c(0)) = (4, 0, 2)$$

$$n(\sigma(1)) = (n_a(1), n_b(1), n_c(1)) = (3, 1, 2)$$

$$n(\sigma(2)) = (n_a(2), n_b(2), n_c(2)) = (2, 1, 3)$$

$$n(\sigma(3)) = (n_a(3), n_b(3), n_c(3)) = (2, 2, 2)$$

À partir de ces vecteurs de congestion, nous pouvons trouver le nombre minimum de chaque bien  $(n_r)_{min} = \min_k n_r(k)$ . Dans cet exemple nous avons alors :

$$(n_a)_{min} = 2, (n_b)_{min} = 0, (n_c)_{min} = 2$$

On a aussi :

$$(n_a)_{min} = 2 \leq n_a(k) \leq (n_a)_{min} + 1 = 3, \text{ pour tout } k \text{ avec } 0 \leq k \leq 3.$$

$$(n_b)_{min} = 0 \leq n_b(k) \leq (n_b)_{min} + 1 = 1, \text{ pour tout } k \text{ avec } 0 \leq k \leq 3.$$

$$(n_c)_{min} = 2 \leq n_c(k) \leq (n_c)_{min} + 1 = 3, \text{ pour tout } k \text{ avec } 0 \leq k \leq 3$$

Considérant la voie d'amélioration suivante :

$$\sigma(0) \rightarrow \sigma(1) \rightarrow \sigma(2) \rightarrow \sigma(3)$$

c'est-à-dire,  $(a, a, a, a, c, c) \rightarrow (a, \mathbf{b}, a, a, c, c) \rightarrow (a, b, a, \mathbf{c}, c, c) \rightarrow (a, b, a, c, \mathbf{b}, c)$ .

À partir de ce dernier profil, aucun joueur ne peut dévier. Par exemple le joueur 2 ne peut dévier de  $(a, b, a, c, b, c)$  vers  $(a, \mathbf{c}, a, c, b, c)$ , car sinon, nous aurions :

$$u_2(a, c, a, c, b, c) = u_2(3c) \geq u_2(2b) \text{ et } u_2(3c) \geq u_2(3a)$$

$$u_2(a, b, a, c, b, c) = u_2(2b) \geq u_2(3a) \text{ et } u_2(2b) \geq u_2(3c)$$

Or, ceci est impossible. Alors, le joueur 2 ne peut dévier deux fois ou plus. Finalement, un joueur peut dévier au plus une fois. Donc la longueur de la voie est au plus  $n + 1$ . D'où,  $M \leq n$ .

Nous présentons maintenant la preuve proposée par Milchtaich (dans [41]) pour démontrer le théorème 3.3.1. Cette preuve est basée sur un raisonnement par récurrence et sur le résultat du lemme précédent.

**Preuve du théorème 3.3.1.** Pour  $n = 1$ , la preuve est triviale. Nous supposons que le théorème est vrai pour tout jeu de congestion avec  $(n - 1)$  joueurs et nous montrons que le résultat reste vrai pour les jeux à  $n$  joueurs. Soit  $G(N, R, (d_r^i)_{i \in N, r \in R})$  un jeu de congestion avec  $n$  joueurs. Ce jeu peut être réduit à un jeu  $\bar{G}$  avec  $(n - 1)$  joueurs, en supprimant le dernier joueur (le

joueur  $n$ ). Ce jeu réduit est également un jeu de congestion à choix unique avec des fonctions de paiements spécifiques  $\overline{d}_r^i$  définies comme suit :

$$\overline{d}_r^i(\overline{n}_r) = d_r^i(\overline{n}_r), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et tout } r \text{ dans } R,$$

où  $\overline{n}_r = |\{1 \leq i \leq n-1 : \sigma_i = r\}|$ . Par l'hypothèse d'induction, il existe, pour  $\overline{G}$ , un équilibre de Nash :  $\overline{\sigma} = (\sigma_1(0), \sigma_2(0), \dots, \sigma_{n-1}(0))$ . Soit  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  le vecteur de congestion correspondant au profil  $\overline{\sigma}$ . Revenons au jeu  $G$  et notons  $\sigma_n(0)$  une meilleure réponse du joueur  $n$  (dans  $G$ ) aux stratégies choisies par les autres joueurs dans le jeu  $\overline{\sigma}$ . Il est facile de voir que  $d_{\sigma_i(0)}^i(\overline{n}_{\sigma_i(0)}) \geq d_r^i(\overline{n}_r + 1)$ , pour tout  $i$  et pour tout  $r$ . En commençant par  $r(0) = \sigma_n(0)$  et en posant  $\sigma(0) = (\sigma_1(0), \sigma_2(0), \dots, \sigma_{n-1}(0), \sigma_n(0))$ , on peut trouver une séquence de stratégies  $r(0), r(1), \dots, r(M)$  et une voie d'amélioration de meilleure réponse  $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(M)$ , définie comme dans la partie (1) du lemme, tel que  $M(M \geq 0)$  soit maximal. Nous allons montrer que :

$$\sigma(M) = (\sigma_1(M), \sigma_2(M), \dots, \sigma_n(M)) \text{ est un équilibre de Nash.}$$

Pour chaque joueur  $i$  ayant dévié de sa stratégie dans  $\sigma(0)$ , la stratégie  $\sigma_i(M)$  est une meilleure réponse dans  $\sigma(M)$ . Ceci, est démontré dans la preuve du lemme 4.3.2. Il reste maintenant à prouver que  $\sigma_i(M) = \sigma_i(0)$  est une meilleure réponse pour chaque joueur  $i$  n'ayant pas dévié.

Si  $\sigma_i(M) = r(M)$  et  $r(M)$  n'est pas une meilleure réponse pour le joueur  $i$ , en déviant de  $r(M)$  (dans  $\sigma(M)$ ) vers une meilleure réponse  $r(M+1)$ , le joueur  $i$  transforme le profil  $\sigma(M)$  en un nouveau profil  $\sigma(M+1)$ . La voie d'amélioration de meilleure réponse  $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(M)$  peut donc être prolongée par  $\sigma(M+1)$ , ce qui contredit la maximalité de  $M$ .

Considérant maintenant le cas où  $\sigma_i(M) \neq r(M)$ . Dans ce cas, le nombre de joueurs jouant la stratégie  $\sigma_i(M) = \sigma_i(0)$  est le même dans  $\sigma(M)$  et  $\bar{\sigma}$ ; toutes les autres stratégies sont jouées par au moins autant de joueurs que dans  $\bar{\sigma}$  ( $n_r(M) \geq \bar{n}_r, \forall r$ , et  $n_r(M) = \bar{n}_r$ , pour  $r \neq r(M)$ ). Comme nous l'avons déjà remarqué, nous avons :  $d_{\sigma_i(0)}^i(\bar{n}_{\sigma_i(0)}) \geq d_r^i(\bar{n}_r + 1), \forall r$ . Dans le cas où  $\sigma_i(M) \neq r(M)$ , ces inégalités impliquent  $d_{\sigma_i(M)}^i(n_{\sigma_i(M)}(M)) \geq d_r^i(n_r(M) + 1)$ , pour tout  $r$ . Ainsi  $\sigma_i(M)$  est une meilleure réponse pour  $i$  dans  $\sigma(M)$ . ■

La preuve proposée par Milchtaich contient implicitement un algorithme permettant de déterminer un équilibre de Nash en un temps polynomial. Dans son article, Milchtaich décrit les étapes principales de cet algorithme et montre que sa complexité est de  $O(n^2 \times m)$ . Les questions relatives à l'existence et à l'identification d'un équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique, semblent donc avoir trouvé des réponses satisfaisantes (voire définitives) avec les résultats de Milchtaich. En effet, la plupart des travaux traitant des jeux de congestion, qu'il s'agisse de généralisation théoriques ou d'études appliquées, reproduisent le même schéma de preuve que celui de la preuve de Milchtaich et reprennent le mécanisme décrit par cet auteur pour la construction d'un équilibre de Nash<sup>4</sup>. Cependant, il nous paraît à la fois utile et intéressant de prolonger l'analyse initiée par Milchtaich en partant des observations/questions suivantes :

- La preuve proposée par Milchtaich, bien que constructive, basée sur des résultats préliminaires (ceux du lemme 3.3.2) dont la formulation est assez complexe, utilise souvent des réorganisations des séquences de

---

4. Pour un tour d'horizon des travaux de recherche sur les jeux de congestion à choix unique, voir par exemple [25].

stratégies et des profils de stratégies et procède par un raisonnement par récurrence. Tous ces éléments rendent cette preuve assez difficile de comprendre. Est-il possible de simplifier cette preuve ou de proposer une preuve alternative plus simple et éventuellement plus courte? Est-il possible de proposer une preuve directe qui ne soit pas basée sur un raisonnement par récurrence?

- Le mécanisme d'amélioration par meilleure réponse ne permet que de construire un seul équilibre de Nash. Est-il possible de proposer un autre mécanisme permettant de décrire tous les équilibres de Nash, du moins dans certains cas particuliers de jeux de congestion à choix unique?

### **3.4 Résultats : Nouvelles preuves et description des équilibres de Nash**

Dans ce qui suit, nous aurons pour objectif de proposer une méthode simple permettant de construire facilement un équilibre de Nash (au moins) dans les jeux de congestion à choix unique. Nous nous attacherons notamment à isoler des cas particuliers de ce type de jeux pour lesquels nous montrerons qu'il est possible d'établir la liste de tous les équilibres de Nash. Contrairement à ce qui est systématiquement proposé dans la littérature, notre approche ne sera pas basée sur des mécanismes d'amélioration : nous simplifions l'analyse en la limitant aux séquences des derniers termes des fonctions d'utilité ordinales. Enfin, dans le but de réduire la complexité de la recherche d'équilibres dans les jeux de congestion à choix unique, nous examinerons la possibilité de produire une preuve du théorème de Milchtaich, sans passer par un raisonnement de

réurrence.

### 3.4.1 Le cas de deux ressources ( $m = 2$ )

Nous commençons, dans la sous-section suivante par traiter le cas simple où il n'y a que deux ressources à la disposition des joueurs. Notre objectif est de proposer une méthode générale qui permet de connaître la structure générale des équilibres de Nash et d'établir la liste exhaustive de ces équilibres. Par souci de clarté, nous avons choisi de distinguer deux cas : celui où les ordres de préférence des joueurs sont tous stricts, et celui où ces ordres peuvent présenter des cas d'ex-aequo.

#### 1er cas : ordres de préférence stricts

Soient  $R = \{a, b\}$  un ensemble de deux biens et  $G(N, R, (\prec)_{i \in N})$  un jeu de congestion à choix unique. Pour pouvoir développer notre approche, nous aurons besoin de la notation suivante : pour un joueur  $i$  dans  $N$ , on notera  $(a, 0) \succ_i (b, n+1)$  (ou encore  $0 \cdot a \succ_i (n+1) \cdot b$  en adoptant la notation simplifiée) lorsque  $(a, 1) \prec_i (b, n)$ . De la même manière, on notera  $(b, 0) \succ_i (a, n+1)$  (ou encore  $0 \cdot b \succ_i (n+1) \cdot a$ ) lorsque  $(b, 1) \prec_i (a, n)$ .

Pour tout  $i$  dans  $N$ , nous définissons les deux entiers suivants :

$$p_i = \max \{p \in \{0, 1, \dots, n\} : (a, p) \succ_i (b, n+1-p)\}$$

$$q_i = \max \{q \in \{0, 1, \dots, n\} : (b, q) \succ_i (a, n+1-q)\}$$

Ainsi, l'entier  $p_i$  représente la taille maximale d'un groupe choisissant le bien  $a$ , dans un profil de stratégies donné, auquel le joueur  $i$  peut appartenir. Au delà de cette taille, le joueur  $i$  aura intérêt à choisir le bien  $b$ . En effet, par

définition de  $p_i$ , on a :  $p_i \cdot a \succ_i (n + 1 - p_i) \cdot b$  et  $(p_i + 1) \cdot a \prec_i (n - p_i) \cdot b$ . L'entier  $q_i$  s'interprète de la même manière en remplaçant  $a$  par  $b$ . Il est facile de voir que pour tout  $i$  dans  $N$ , on a :  $p_i + q_i = n$ .

À partir de la liste des entiers  $p_i$  et  $q_i$  ( $i \in N$ ), nous pouvons définir deux autres entiers qui vont permettre d'identifier l'unique vecteur de congestion qui peut correspondre à un équilibre de Nash du jeu :

$$n(a) = \max \{p \in \{0, 1, \dots, n\} : |\{i \in N : p_i \geq p\}| \geq p\}$$

$$n(b) = \max \{q \in \{0, 1, \dots, n\} : |\{i \in N : q_i \geq q\}| \geq q\}$$

Il est facile de voir que l'entier  $n(a)$  représente la taille maximale d'un groupe de joueurs qui peuvent choisir le bien  $a$  sans qu'aucun membre de ce groupe n'ait intérêt à dévier de cette stratégie. En effet, soit  $E$  un sous-ensemble de  $N$  de taille,  $p$ , strictement supérieure à  $n(a)$ . Par définition de  $n(a)$ , l'un de joueurs  $i$  de ce sous-ensemble est tel que  $p_i < p$ . Or, par définition de  $p_i$ , ceci signifie que ce joueur n'a pas intérêt à faire partie de ce groupe. Le nombre  $n(b)$  a une signification analogue, et on vérifie facilement que  $n(a) + n(b) = n$ .

Pour finir, nous introduisons les trois ensembles suivants :

$$A(G) = \{i \in N : p_i > n(a)\}, B(G) = \{i \in N : p_i < n(a)\}$$

$$C(G) = \{i \in N : p_i = n(a)\}$$

Notons que  $N$  est l'union disjointe de ces trois ensembles, que chacun de ces ensembles peut-être vide et que  $|C(G)| \succeq na - |A(G)|$ . Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui nous permet, de manière très simple, de montrer que le jeu admet au moins un équilibre de Nash, de dénombrer tous ses équilibre et de les décrire explicitement.

**Proposition 3.4.1.** (S.Sbabou, H.Smaoui, A.Ziad). Soient  $R = \{a, b\}$  et  $G(N, R, (\prec)_{i \in N})$  un jeu de congestion à choix unique où tous les ordres de préférences sont stricts.

1.  $G$  admet au moins un équilibre de Nash. Tous les équilibres correspondent au même vecteur de congestion :  $v = (n(a), n(b))$
2. Chaque équilibre de Nash de  $G$ ,  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ , est caractérisé par un unique sous-ensemble  $D$  (éventuellement vide) de  $C(G)$ , de cardinal  $n(a) - |A(G)|$ , de la sorte que : pour tout  $i$  dans  $N$ ,  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A(G) \cup D$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B(G) \cup (C \setminus D)$ .
3. Le jeu admet exactement  $C_{|C(G)|}^{n(a) - |A(G)|}$  équilibres de Nash. En particulier,  $n(a) = |A(G)|$  le jeu admet un unique équilibre de Nash.

**Preuve.** 1) Par définition de  $n(a)$ , il existe au moins  $n(a)$  joueurs  $i$  dans  $N$  tels que  $p_i \geq n(a)$ . Choisissons donc  $n(a)$  joueurs vérifiant cette condition en incluant tous les joueurs pour qui  $p_i > n(a)$ . Notons  $A$  l'ensemble de ces joueurs. Pour tous les joueurs qui sont dans  $B = N \setminus A$ , nous avons obligatoirement  $p_i \leq n(a)$  et donc  $q_i \geq n(b)$ . Il est alors facile, en revenant à la définition de  $p_i$  et  $q_i$ , de vérifier que le profil  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  défini par  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B$  est un équilibre de Nash.

Soit  $\sigma^*$  un équilibre de Nash de  $G$  et soit  $(\alpha, \beta)$  le vecteur de congestion associé à  $\sigma^*$ . Supposons que  $\alpha > n(a)$ . Comme  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash, il existe donc  $\alpha$  joueurs tels que  $p_i \geq \alpha$ , ce qui contredit la maximalité de  $n(a)$ . On doit donc avoir  $\alpha \leq n(a)$ . De la même manière, on montre que  $\beta \leq n(b)$ . Comme  $\alpha + \beta = n$  et  $n(a) + n(b) = n$ , on a nécessairement  $\alpha = n(a)$  et  $\beta = n(b)$ .

2) Soit  $D$  un sous-ensemble (éventuellement vide) de  $C(G)$ , de cardinal  $n(a) -$

$|A(G)|$ . Soit  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  le profil de stratégies défini par : pour tout  $i$  dans  $N$ ,  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A(G) \cup D$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B(G) \cup (C(G) \setminus D)$ . Le profil  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash. En effet, soit  $i \in A(G) \cup D$ . Par définition de  $A(G)$  et de  $D$ , on a  $p_i \geq n(a)$ . Par définition de  $p_i$  et par l'hypothèse de monotonie, on obtient :  $n(a) \cdot a \succeq_i (n(b) + 1) \cdot b$ . De la même manière, on montre que pour tout  $i$  dans  $B(G) \cup (C(G) \setminus D)$ ,  $n(b) \cdot b \succeq_i (n(a) + 1) \cdot a$ . Réciproquement, soit  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  un équilibre de Nash de  $G$ . On sait d'après 1) que le vecteur de congestion associé à  $\sigma^*$  est  $(n(a), n(b))$ . On doit donc avoir  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A(G)$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B(G)$ . Il suffit alors de poser  $D = \{i \in N : \sigma_i^* = a \text{ et } i \notin A(G)\}$ .

3) Le résultat s'obtient par un simple calcul de dénombrement, à partir de 2). ■

**Exemple 3.5.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  et  $R = \{a, b\}$ . Supposons que les fonctions d'utilité ordinales des huit joueurs soient définies par :

- $J_1 : 8b \prec 7b \prec 8a \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 7a \prec 6a \prec 5a \prec 3b \prec 4a \prec 3a \prec 2b \prec 2a \prec b \prec a$   
 $J_2 : 8a \prec 7a \prec 6a \prec 8b \prec 7b \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 5a \prec 4a \prec 3a \prec 2a \prec a \prec 3b \prec 2b \prec b$   
 $J_3 : 8b \prec 7b \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 3b \prec 8a \prec 7a \prec 6a \prec 2b \prec 5a \prec 4a \prec 3a \prec b \prec 2a \prec a$   
 $J_4 : 8b \prec 7b \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 3b \prec 2b \prec b \prec 8a \prec 7a \prec 6a \prec 5a \prec 4a \prec 3a \prec 2a \prec a$   
 $J_5 : 8a \prec 7a \prec 8b \prec 7b \prec 6a \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 3b \prec 5a \prec 4a \prec 3a \prec 2a \prec a \prec 2b \prec b$   
 $J_6 : 8b \prec 7b \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 3b \prec 2b \prec 8a \prec 7a \prec 6a \prec 5a \prec 4a \prec b \prec 3a \prec 2a \prec a$   
 $J_7 : 8a \prec 7a \prec 6a \prec 8b \prec 5a \prec 7b \prec 4a \prec 3a \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 3b \prec 2a \prec a \prec 2b \prec b$   
 $J_8 : 8b \prec 8a \prec 7a \prec 7b \prec 6b \prec 5b \prec 4b \prec 6a \prec 3b \prec 5a \prec 2b \prec 4a \prec 3a \prec b \prec 2a \prec a$

Nous avons omis les indices des joueurs dans les ordres de préférence. Pour chaque joueur  $i$ , on cherche l'entier  $p_i$  qui est le plus grand  $p$  tel que  $na \succ_i (n+1-p)b$ , on a donc  $(n-p)b \succ_i (p+1)a$ .

$$\begin{aligned}
p_1 = 5 : & \quad 5a \succ_1 4b \quad \text{et} \quad 3b \succ_1 6a \\
p_2 = 5 : & \quad 5a \succ_2 4b \quad \text{et} \quad 3b \succ_2 6a \\
p_3 = 6 : & \quad 6a \succ_3 3b \quad \text{et} \quad 2b \succ_3 7a \\
p_4 = 8 : & \quad 8a \succ_4 b \quad \text{et} \quad 0b \succ_4 9a \\
p_5 = 5 : & \quad 5a \succ_5 4b \quad \text{et} \quad 3b \succ_5 6a \\
p_6 = 7 : & \quad 7a \succ_5 2b \quad \text{et} \quad b \succ_5 8a \\
p_7 = 2 : & \quad 2a \succ_5 7b \quad \text{et} \quad 6b \succ_5 3a \\
p_8 = 5 : & \quad 5a \succ_5 4b \quad \text{et} \quad 3b \succ_5 6a
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc vérifier facilement que  $n(a) = 5$  et  $n(b) = 3$ . Le seul vecteur de congestion correspondant aux équilibres de Nash est le vecteur  $(5a, 3b)$ . De plus, nous avons :  $A(G) = \{3, 4, 6\}$ ,  $B(G) = \{7\}$  et  $C(G) = \{1, 2, 5, 8\}$ . D'après la proposition 3.4.1, on sait qu'il y a exactement  $C_4^2 = 6$

équilibres de Nash différents. Tous ces équilibres sont en commun  $\sigma^* = (a)$  si  $i \in A(G)$  et  $\sigma^* = (b)$  si  $i \in B(G)$ . Chacun de ces équilibres est caractérisé par un sous-ensemble  $D$  de  $C(G)$  avec  $|D| = 2$  et  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in D$ . La liste des équilibres de Nash de ce jeu est donc :

$$(a, a, a, a, b, a, b, b), (a, b, a, a, a, a, b, b), (a, b, a, a, b, a, b, a), \\ (b, a, a, a, a, a, b, b), (b, a, a, a, b, a, b, a), (b, b, a, a, a, a, b, a)$$

**Exemple 3.6.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  et  $R = \{a, b\}$ . Nous ne donnerons pas les fonctions d'utilités ordinales dans leurs intégralité, nous supposons que les nombres  $(p_i)_{i \in N}$  sont donnés par :

$$p_1 = 6, p_2 = 5, p_3 = 4, p_4 = 6, p_5 = 7, p_6 = 6, p_7 = 9, p_8 = 6, p_9 = 8, p_{10} = 6.$$

Ici, on peut voir que  $n(a) = 6$  et  $n(b) = 4$ . Le seul vecteur de congestion correspondant aux équilibres de Nash est le vecteur  $(6a, 4b)$ . De plus, nous avons :  $A(G) = \{5, 7, 9\}$ ,  $B(G) = \{2, 3\}$  et  $C(G) = \{1, 4, 6, 8, 10\}$ . D'après la proposition 4.4.1, on sait qu'il y a exactement  $C_5^3=10$  équilibres de Nash différents. Tous ces équilibres sont en commun  $\sigma^* = (a)$  si  $i \in A(G)$  et  $\sigma^* = (b)$  si  $i \in B(G)$ . Chacun de ces équilibres est caractérisé par un sous-ensemble  $D$  de  $C(G)$  tel que  $|D| = 3$  et  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in D$ . La liste des équilibres de Nash de ce jeu est donc :

$$(a, b, b, a, a, a, a, b, a, b), (a, b, b, a, a, b, a, a, a, b), \\ (a, b, b, b, a, a, a, a, a, b), (b, b, b, a, a, a, a, a, a, b), \\ (b, b, b, a, a, a, a, b, a, a), (b, b, b, a, a, b, a, a, a, a), \\ (b, b, b, b, a, a, a, a, a, a), (a, b, b, b, a, b, a, a, a, a), \\ (a, b, b, b, a, a, a, b, a, a), (a, b, b, a, a, b, a, b, a, a).$$

## Cas 2 : ordres de préférence avec possibilités d'ex-aequo

Soient  $R = \{a, b\}$  un ensemble de deux biens et  $G(N, R, (\succsim_i)_{i \in N})$  un jeu de congestion à choix unique. Ici, les ordres de préférence des joueurs peuvent présenter des cas d'ex-aequo. Comme pour le cas précédent, pour tout  $i$  dans  $N$ , on notera :

$$p_i = \max \{p \in \{0, 1, \dots, n\} : (a, p) \succsim_i (b, n + 1 - p)\}$$

$$q_i = \max \{q \in \{0, 1, \dots, n\} : (b, q) \succsim_i (a, n + 1 - q)\}$$

Les nombres  $p_i$  et  $q_i$  ont la même signification que dans le cas des ordres stricts. Par contre, nous n'avons plus obligatoirement l'égalité  $p_i + q_i = n$ . À cause des éventuels cas d'ex-aequo, nous pouvons simplement écrire : pour tout  $i$  dans  $N$ , on a :  $p_i + q_i \geq n$ . Il est donc possible, pour certains joueurs  $i$ , d'avoir  $p_i + q_i > n$ . Ce point est important, car il aura comme conséquence la possibilité d'avoir plus d'un vecteur de congestion correspondant à un équilibre de Nash.

À partir de la liste des entiers  $p_i$  et  $q_i$  ( $i \in N$ ), nous pouvons définir, comme dans le cas des ordres stricts, les deux nombres suivants :

$$n(a) = \max \{p \in \{0, 1, \dots, n\} : |\{i \in N : p_i \geq p\}| \geq p\}$$

$$n(b) = \max \{q \in \{0, 1, \dots, n\} : |\{i \in N : q_i \geq q\}| \geq q\}$$

Là encore, contrairement au cas des ordres stricts, nous n'avons plus nécessairement l'égalité  $n(a) + n(b) = n$ , mais simplement l'inégalité  $n(a) + n(b) \geq n$ . Pour pouvoir décrire tous les équilibre de Nash, pour chaque vecteur de congestion  $v = (\alpha, \beta)$  vérifiant  $\alpha \leq n(a)$ ,  $\beta \leq n(b)$  et  $\alpha + \beta = n$ , nous introduisons les trois ensembles suivants :

$$A(G, v) = \{i \in N : p_i \geq \alpha \text{ et } q_i < \beta\}, B(G, v) = \{i \in N : q_i \geq \beta \text{ et } p_i < \alpha\}$$

$$C(G, v) = \{i \in N : p_i \geq \alpha \text{ et } q_i \geq \beta\}$$

Notons que  $N$  est l'union disjointe de ces trois ensembles et que chacun de ces ensembles peut-être vide. Notons aussi que le cas  $p_i < \alpha$  et  $q_i < \beta$  ne se présente pas car  $p_i + q_i \geq n$  et  $\alpha + \beta = n$ . Le résultat suivant permet d'établir l'existence d'au moins un équilibre de Nash et de dresser la liste complète de tous les équilibres d'un jeu donné.

**Proposition 3.4.2.** *(S.Sbabou, H.Smaoui, A.Ziad) Soient  $R = \{a, b\}$  et  $G(N, R, (\zeta)_{i \in N})$  un jeu de congestion à choix unique.*

1. *À chaque vecteur de congestion  $v = (\alpha, \beta)$  tel que  $\alpha \leq n(a)$ ,  $\beta \leq n(b)$  et  $\alpha + \beta = n$ , correspond (au moins) un équilibre de Nash de  $G$ .*
2. *Chacun des équilibres de Nash de  $G$  correspondant au vecteur  $v$ ,  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ , est caractérisé par un unique sous-ensemble  $D$  (éventuellement vide) de  $C(G, v)$ , de cardinal  $\alpha - |A(G, v)|$ , de la sorte que : pour tout  $i$  dans  $N$ ,  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A(G, v) \cup D$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B(G, v) \cup (C(G, v) \setminus D)$ .*

**Preuve.** Il suffit de prouver 2), car 1) s'obtient comme conséquence de 2). Soit  $v = (\alpha, \beta)$  un vecteur de congestion tel que  $\alpha \leq n(a)$ ,  $\beta \leq n(b)$  et  $\alpha + \beta = n$ . Soit  $D$  un sous-ensemble (éventuellement vide) de  $C(G, v)$ , de cardinal  $\alpha - |A(G, v)|$ . Soit  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  un profil de stratégies tel que : pour tout  $i$  dans  $N$ ,  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A(G, v) \cup D$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B(G, v) \cup (C(G, v) \setminus D)$ .  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash. En effet, soit  $i \in A(G, v) \cup D$ . Par définition de  $A(G, v)$  et de  $D$ , on a  $p_i \geq \alpha$ . Par définition de  $p_i$  et par l'hypothèse de monotonie, on obtient :  $\alpha \cdot a \succeq_i (\beta + 1) \cdot b$ . De la même manière, on montre que pour tout  $i$  dans  $B(G, v) \cup (C(G, v) \setminus D)$ ,  $\beta \cdot b \succeq_i (\alpha + 1) \cdot a$ . Réciproquement, soit

$\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  un équilibre de Nash de  $G$ , soit  $v = (\alpha, \beta)$  le vecteur de congestion associé à cet équilibre. On a obligatoirement  $\alpha \leq n(a)$ , sinon il existe  $\alpha$  joueurs  $i$  avec  $p_i \geq \alpha > n(a)$ . Ceci est impossible par définition de  $n(a)$ . De la même manière, on montre que  $\beta \leq n(b)$ . Par définition d'un vecteur de congestion, on a aussi  $\alpha + \beta = n$ . Comme  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash, pour tout  $i$  dans  $N$ , on a obligatoirement :  $\sigma_i^* = a$  si  $i \in A(G, v)$  et  $\sigma_i^* = b$  si  $i \in B(G, v)$ . Il suffit alors de poser  $D = \{i \in N : \sigma_i^* = a \text{ et } i \notin A(G, v)\}$  et de remarquer que le cas  $p_i < \alpha$  et  $q_i < \beta$  n'est pas possible. ■

**Exemple 3.7.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $R = \{a, b\}$ . Supposons que les fonctions d'utilité ordinale des cinq joueurs soient définies par :

$$J_1 : 5a \prec 5b \prec 4b \prec 4a \prec 3b \sim 3a \sim 2a \prec 2b \sim a \prec b$$

$$J_2 : 5b \sim 4b \sim 5a \sim 4a \sim 3b \sim 3a \sim 2a \sim 2b \sim a \sim b$$

$$J_3 : 5a \prec 5b \prec 4b \prec 4a \sim 3b \sim 3a \sim 2b \prec 2a \prec a \prec b$$

$$J_4 : 5b \prec 5a \prec 4b \prec 4a \sim 3b \sim 3a \sim 2a \prec 2b \prec a \prec b$$

$$J_5 : 5b \sim 4b \sim 5a \sim 4a \sim 3b \sim 3a \sim 2a \sim 2b \sim a \sim b$$

On voit facilement que :

$$p_1 = 3, q_1 = 3 \quad p_2 = 5, q_2 = 5, \quad p_3 = 4, q_3 = 3, \quad p_4 = 3, q_4 = 3, \quad p_5 = 5, q_5 = 5.$$

On a donc  $na = 4$  et  $nb = 3$ . D'après la proposition 4.4.2, les vecteurs de congestion possibles sont :  $v_1 = (4a, b)$ ,  $v_2 = (3a, 2b)$ ,  $v_3 = (2a, 3b)$ . Comme  $v_1 = (4a, b)$ , on a :  $A(G, v_1) = \emptyset$ ,  $B(G, v_1) = \{1\}$  et  $C(G, v_1) = \{2, 3, 4, 5\}$ . Il y a donc un seul équilibre correspondant à  $v_1$ , il s'agit du profil  $(b, a, a, a, a)$ .

De même,  $v_2 = (3a, 2b)$  on a :  $A(G, v_2) = \emptyset$ ,  $B(G, v_2) = \emptyset$  et  $C(G, v_3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Les équilibres de Nash correspondant à  $v_2$  sont donc :

$$(b, b, a, a, a), (b, a, b, a, a), (b, a, a, b, a), (b, a, a, a, b), (a, b, a, a, b),$$

$$(a, a, b, a, b), (a, a, a, b, b), (a, b, a, b, a), (a, b, b, a, a), (a, a, b, b, a).$$

Finalement pour  $v_3 = (2a, 3b)$  on a :  $A(G, v_3) = \emptyset$ ,  $B(G, v_3) = \emptyset$  et  $C(G, v_3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Les équilibres de Nash correspondant à  $v_3$  sont donc :

$(b, b, b, a, a)$ ,  $(b, b, a, b, a)$ ,  $(b, b, a, a, b)$ ,  $(b, a, a, b, b)$ ,  $(a, b, b, b, a)$ ,  
 $(a, a, b, b, b)$ ,  $(b, a, b, b, a)$ ,  $(b, a, b, a, b)$ ,  $(a, b, b, a, b)$ ,  $(a, b, a, b, b)$ .

**Exemple 3.8.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $R = \{a, b\}$ . Nous ne donnerons pas les fonctions d'utilité ordinales dans leurs intégralité, nous supposons que les nombres  $(p_i)_{i \in N}$  et  $(q_i)_{i \in N}$  sont donnés par :

$p_1 = 4$ ,  $q_1 = 4$   $p_2 = 2$ ,  $q_2 = 5$ ,  $p_3 = 1$ ,  $q_3 = 6$ ,  $p_4 = 5$ ,  $q_4 = 1$ ,  $p_5 = 4$ ,  
 $q_5 = 3$ ,  $p_6 = 4$ ,  $q_6 = 3$ . Dans ce cas, on a directement  $n(a) = 4$  et  $n(b) = 3$ .

Les vecteurs de congestion sont donc :  $v_1 = \{4a, 2b\}$  et  $v_2 = \{3a, 3b\}$ . Pour le vecteur  $v_1$ ,  $A(G, v_1) = \{4\}$ ,  $B(G, v_1) = \{2, 3\}$  et  $C(G, v_1) = \{1, 5, 6\}$ . Le seul équilibre de Nash associe à  $v_1$  est donc le profil  $(a, b, b, a, a, a)$ . Pour le vecteur  $v_2$ , on a  $A(G, v_2) = (4)$ ,  $B(G, v_2) = (2, 3)$  et  $C(G, v_2) = (1, 5, 6)$ . Les équilibres de Nash associés à  $v_2$  sont donc :  $(b, b, b, a, a, a)$ ,  $(a, b, b, a, b, a)$  et  $(a, b, b, a, b, b)$ .

### 3.4.2 Les jeux de congestion avec partition exacte

Les jeux étudiés dans cette section constituent une sous-famille de jeux de congestion à choix unique pour laquelle nous développons une méthode conduisant plus facilement à l'identification exhaustive des équilibres de Nash. Nous commençons d'abord par généraliser la notion de séquence des  $n$  derniers termes, introduite dans le chapitre précédent :

**Définition 3.1.** Soit  $G(N, R, (\preceq_i)_{i \in N})$  un jeu de congestion (non symétrique), une  $n$ -séquence (ou séquence de  $n$  derniers termes) pour le joueur  $i$  est une  $n$ -séquence (au sens défini pour les jeux symétriques) issue de l'ordre  $\preceq_i$ . Une telle  $n$ -séquence sera notée par  $T^i$ .

Dans la suite, lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, nous désignons par  $T^i$  à la fois la  $n$ -séquence  $T^i$  et l'ordre (induit par  $\preceq_i$ ) sur  $T^i$ .

**Remarque 3.2.** Si la fonction d'utilité  $\preceq_i$  est un ordre strict, il y a une seule  $n$ -séquence, celle issue de  $\prec_i$ .

**Définition 3.2.** Soit  $G(N, R, (\preceq_i)_{i \in N})$  un jeu à choix unique (non symétrique). Une configuration de  $G$  est un choix d'une  $n$ -séquence (ordonnée) pour chaque joueur  $i \in N$ .

Ainsi, une configuration comporte une  $n$ -séquence par joueur. Il y a plusieurs configurations possibles pour un jeu. Nous pouvons représenter une configuration par un tableau à  $n$  lignes et  $n$  colonnes : la première ligne contient  $T^1$ , la deuxième contient  $T^2$ ,  $\dots$ , etc.

**Remarque 3.3.** Lorsque les ordres sont strictes, il y a une seule configuration.

Pour pouvoir présenter les résultats de cette sous-section, nous devons d'abord introduire quelques autres définitions complémentaires.

**Définition 3.3.** Soit  $G(N, R, (\preceq_i)_{i \in N})$  un jeu à choix unique (non symétrique) et soit  $(T^1, T^2, \dots, T^n)$  une configuration (ordonnée). Pour tout bien  $r \in R$ , nous notons  $\alpha_i(r)$  : le nombre défini par  $\alpha_i(r) = \max \{p : (r, p) \in T^i\}$  et  $\alpha(r)$  le nombre défini par  $\alpha(r) = \max \{p : |i \in N : (r, p) \in T^i| \geq p\}$ .

**Remarque 3.4.**  $\alpha(r)$  est le nombre maximum de joueurs qui peuvent choisir le bien  $r$  dans un profil de stratégies correspondant à un équilibre de Nash. Il peut être calculé à partir des  $\alpha_i(r)$  :  $\alpha(r)$  est le plus grand entier  $p$  tel que : il existe au moins  $p$  joueurs vérifiant  $\alpha_i(r) \geq p$ .

Pour illustrer ces définitions, nous donnons quelques exemples :

**Exemple 3.9.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons pour chaque joueur, pour chaque bien  $r$ , l'utilité est strictement décroissante en fonction du nombre de joueurs choisissant  $r$ . Pour appliquer la définition (4.1), il n'est pas nécessaire de connaître les fonctions d'utilité dans leur intégralité : il suffit de connaître l'ordre sur les  $n$  derniers termes. Nous n'avons donc besoin que des séquences des  $n$  derniers termes, supposons qu'elles soient données par :

$$\begin{aligned}
 & \dots 4a \prec_1 2c \prec_1 c \prec_1 3a \prec_1 2a \prec_1 a. \\
 & \dots 4c \prec_2 2b \prec_2 3c \prec_2 2c \prec_2 b \prec_2 c. \\
 & \dots b \prec_3 c \prec_3 4a \prec_3 3a \prec_3 2a \prec_3 a. \\
 & \dots 3c \prec_4 2a \prec_4 2c \prec_4 b \prec_4 a \prec_4 c. \\
 & \dots 2c \prec_5 3a \prec_5 c \prec_5 2a \prec_5 b \prec_5 a. \\
 & \dots 3a \prec_6 2a \prec_6 a \prec_6 2c \prec_6 c \prec_6 b.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons désormais représenter ces préférences individuelles  $T^i$  par le tableau suivant :

$T^1$	4a	2c	c	3a	2a	a
$T^2$	4c	2b	3c	2c	b	c
$T^3$	b	c	4a	3a	2a	a
$T^4$	3c	2a	2c	b	a	c
$T^5$	2c	3a	c	2a	b	a
$T^6$	3a	2a	a	2c	c	b

Il est facile de trouver rapidement l'entier  $\alpha(r)$  pour chaque bien  $r$ . Par exemple, pour le bien  $a$ , nous observons que  $4a$  ne vérifie pas la définition

précédente, puisque nous avons seulement deux joueurs (1 et 3) pour que  $4a$  apparaisse dans la séquence des 6 derniers termes. Cependant, nous avons quatre joueurs pour que  $3a$  figure dans la ligne représentant  $T^i$ . Nous avons donc :  $\max\{p : |\{i \in N : (a, p) \in T^i\}| \geq p\} = 3$ . D'où  $\alpha(a) = 3$ . De la même manière, on peut voir que  $\alpha(b) = 1$  et  $\alpha(c) = 2$ .

**Exemple 3.10.**  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les nombres  $\alpha_i(r)$  soient donnés par :  $\alpha_1(a) = 4$ ,  $\alpha_2(a) = 5$ ,  $\alpha_3(a) = 3$ ,  $\alpha_4(a) = 2$ ,  $\alpha_5(a) = 2$ ,  $\alpha_6(a) = 4$  et  $\alpha_7(a) = 1$ . On a alors, pour la ressource  $a$ ,  $\alpha(a) = 3$ . De même, si par exemple  $\alpha_1(b) = 1$ ,  $\alpha_2(b) = 1$ ,  $\alpha_3(b) = 3$ ,  $\alpha_4(b) = 2$ ,  $\alpha_5(b) = 2$ ,  $\alpha_6(b) = 1$  et  $\alpha_7(b) = 3$ , alors  $\alpha(b) = 2$ .

Si  $\alpha_1(c) = 2$ ,  $\alpha_2(c) = 1$ ,  $\alpha_3(c) = 1$ ,  $\alpha_4(c) = 1$ ,  $\alpha_5(c) = 1$ ,  $\alpha_6(c) = 1$  et  $\alpha_7(c) = 1$ , alors  $\alpha(c) = 1$ .

**Définition 3.4.** Une configuration  $(T^1, T^2, \dots, T^n)$  est dite à *partition exacte* si  $\sum_{r=1}^m \alpha(r) = n$ . Un jeu  $G(N, R, (\preceq_i)_{i \in N})$  à choix unique non symétrique vérifie la condition de la partition exacte s'il existe une configuration de  $G$  à partition exacte.

Dans l'exemple 3.5, nous avons  $\sum_{r \in R} \alpha(r) = \alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(c) = 6 = n$ . Le jeu est donc à partition exacte.

L'exemple suivant montre que tous les jeux ne sont pas nécessairement à partition exacte.

**Exemple 3.11.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les ordres de préférences soient stricts et que les seules séquences  $T^i$  soient celles du tableau suivant :

$T^1$	$4a$	$2c$	$c$	$3a$	$2a$	$a$
$T^2$	$4c$	$2b$	$3c$	$2c$	$b$	$c$
$T^3$	$b$	$c$	$4a$	$3a$	$2a$	$a$
$T^4$	$3c$	$2a$	$2c$	$b$	$a$	$c$
$T^5$	$3c$	$2c$	$2b$	$c$	$a$	$b$
$T^6$	$3a$	$2a$	$a$	$2c$	$c$	$b$

D'après ce tableau, qui donne l'unique configuration du jeu, nous avons :  $\alpha(a) = 3$ ,  $\alpha(b) = 2$  et  $\alpha(c) = 3$ . Cette partition n'est pas exacte car  $\alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(c) = 8 > 6$ . Le jeu n'admet donc aucune configuration à partition exacte.

**Remarque 3.5.** On sait déjà, par Milchtaich (1996) que tout jeu de congestion à choix unique admet au moins un équilibre de Nash. Le résultat suivant propose une preuve simple de ce résultat dans le cas des jeux à partition exacte. Notre preuve est directe (elle n'est pas basée sur un raisonnement par récurrence) et ne fait appel à aucun mécanisme d'amélioration pour atteindre un équilibre de Nash : cet équilibre est facilement constructible à partir du tableau regroupant les séquences des  $n$  derniers termes.

**Proposition 3.4.3.** *Tout jeu de congestion à choix unique vérifiant la condition de la partition exacte admet au moins un équilibre de Nash.*

**Preuve.** Soit  $(T^1, T^2, \dots, T^n)$  une configuration (ordonnée) à partition exacte du jeu  $G(N, R, (\preceq_i)_{i \in N})$ . Nous avons alors :

$$\sum_{r=1}^m \alpha(r) = n \quad (3.4.1)$$

Soit  $N_0 = N$  et  $R_0 = R$ . Pour chaque  $r \in R_0$ , soit  $B_0(r) = \{i \in N_0 : (r, \alpha(r)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \forall r' \in R_0\}$ . Ainsi  $B_0(r)$  est l'ensemble des joueurs pour qui le couple  $(r, \alpha(r))$  est préféré (ou équivalent) à tous les autres couples  $(r', \alpha(r'))$ . Notons, que lorsque les ordres sont larges, plusieurs biens  $r$  peuvent être tels que :

$$(r, \alpha(r)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \quad \forall r' \in R_0 \quad (3.4.2)$$

Il existe au moins un bien  $r \in R_0$  tel que :  $|B_0(r)| \geq \alpha(r)$  car  $\sum_{r=1}^m \alpha(r) = n$  (d'après (3.4.1)) et  $\sum_{r=1}^m |B_0(r)| \geq n$  (les ordres  $T^i$  n'étant pas forcément stricts, pour un même joueur, plusieurs couples  $(r, \alpha(r))$  peuvent être ex-aequo et vérifier (3.4.2)).

Choisissons (arbitrairement) un bien  $r_1$  dans  $R$  tel que :  $|B_0(r_1)| \geq \alpha(r_1)$  et soit  $A_0(r_1)$  un sous-ensemble de  $B_0(r_1)$  tel que :

$$|A_0(r_1)| = \alpha(r_1) \text{ et } \forall i \in A_0(r_1), \forall j \in B_0(r_1) \setminus A_0(r_1), \alpha_i(r_1) \geq \alpha_j(r_1).$$

Nous remarquons que :

1.  $A_0(r_1)$  est un sous-ensemble de  $B_0(r_1)$  contenant  $\alpha(r_1)$  joueurs ayant des valeurs  $\alpha_i(r_1)$  supérieures (ou égales) aux valeurs  $\alpha_j(r_1)$  de tous les joueurs de  $B_0(r_1) \setminus A_0(r_1)$ .
2. Il peut y avoir plusieurs choix possibles pour  $A_0(r_1)$ .

Une fois que  $A_0(r_1)$  construit, nous posons :

- $N_1 = N_0 \setminus A_0(r_1)$ ,  $R_1 = R_0 \setminus \{r_1\}$ .
- Pour chaque  $r \in R_1$ , soit :  $B_1(r) = \{i \in N_1 : (r, \alpha(r)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \forall r' \in R_1\}$
- Il existe (au moins) un bien  $r \in R_1$  tel que  $|B_1(r)| \geq \alpha(r)$  car  $\sum_{r \in R_1} \alpha(r) = n - \alpha(r_1)$  et  $\sum_{r \in R_1} |B_1(r)| \geq n - \alpha(r_1)$ .

- Nous choisissons (arbitrairement)  $r_2 \in R_1$  tel que  $B_1(r_2) \geq \alpha(r_2)$ . Nous trouvons un sous-ensemble  $A_1(r_2) = \alpha(r_2)$  et  $\forall i \in A_1(r_2)$ , pour tout  $j \in B_1(r_2) \setminus A_1(r_2)$ ,  $\alpha_i(r_2) \geq \alpha_j(r_2)$ .

Une fois que  $A_1(r_2)$  construit, nous posons :

- $N_2 = N_1 \setminus A_1(r_1)$ ,  $R_2 = R_1 \setminus \{r_2\}$  ( $= R \setminus \{r_1, r_2\}$ )
- Pour chaque  $r \in R_2$ , soit :  $B_2(r) = \{i \in N_2 : (r, \alpha(r)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \forall r' \in R_2\}$
- Il existe (au moins) un bien  $r \in R_2$  tel que  $B_2(r) \geq \alpha(r)$
- Nous choisissons  $r_3 \in R_2$  tel que  $B_2(r_3) \geq \alpha(r_3)$ . Nous trouvons un sous-ensemble  $A_2(r_3)$  de  $B_2(r_3)$  tel que :  $|A_2(r_3)| = \alpha(r_3)$  et  $\forall i \in A_2(r_3)$ ,  $\forall j \in B_2(r_3) \setminus A_2(r_3)$ ,  $\alpha_i(r_3) \geq \alpha_j(r_3)$ .

De manière générale, supposons  $A_{k-1}(r_k)$  construit (pour  $k \geq 1$ ) il y a deux cas :

1.  $|A_0(r_1)| + \dots + |A_{k-1}(r_k)| = n$ , dans ce cas, nous arrêtons le processus.
2.  $|A_0(r_1)| + \dots + |A_{k-1}(r_k)| < n$ , dans ce cas, nous continuons le processus, en posant :

- $N_k = N_{k-1} \setminus A_{k-1}(r_k)$ ,  $R_k = R_{k-1} \setminus \{r_k\}$ .
- Pour chaque  $r \in R_k$ , soit :  $B_k(r) = \{i \in N_k : (r, \alpha(r)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \forall r' \in R_k\}$
- Il existe (au moins) un bien  $r \in R_k$  tel que  $B_k(r) \geq \alpha(r)$  puisque 
$$\sum_{r \in R_k} \alpha(r) = n - (\alpha(r_1) + \dots + \alpha(r_k))$$
 et 
$$\sum_{r \in R_k} |B_k(r)| \geq n - (\alpha(r_1) + \dots + \alpha(r_k))$$
.
- Nous choisissons (arbitrairement)  $r_{k+1} \in R_k$  tel que  $B_k(r_{k+1}) \geq \alpha(r_{k+1})$ .

Nous extrairons un sous-ensemble  $A_k(r_{k+1})$  de  $B_k(r_{k+1})$  tel que :

$$|A_k(r_{k+1})| = \alpha(r_{k+1}) \text{ et } \forall i \in A_k(r_{k+1}), \forall j \in B_k(r_{k+1}) \setminus A_k(r_{k+1}),$$

$$\alpha_i(r_{k+1}) \geq \alpha_j(r_{k+1}).$$

Notons que lorsque le processus s'arrête au bout de l'étape  $l$ , nous avons :

$$N = A_0(r_1) + A_1(r_2) + \dots + A_l(r_{l+1})$$

Maintenant, considérons le profil  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  défini par : pour tout  $i$  dans  $N$ ,  $\sigma_i^* = r_{k+1}$  si et seulement si  $i \in A_k(r_{k+1})$ . Montrons que  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash.

Nous avons : pour tout  $i \in A_0(r_1)$ ,  $\sigma_i^* = r_1$  et par définition de  $B_0(r_1)$  :

$$(r_1, \alpha(r_1)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \forall r' \in R_0 = R$$

$$\text{or, } (r', \alpha(r')) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1)$$

$$\text{D'où : } (r_1, \alpha(r_1)) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1) \forall r' \in R.$$

pour tout  $i \in A_1(r_2)$ ,  $\sigma_i^* = r_2$  et par définition de  $B_1(r_2)$  :

$$(r_2, \alpha(r_2)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \forall r' \in R_1 = R \setminus \{r_1\} \quad (3.4.3)$$

D'où :  $(r_2, \alpha(r_2)) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1) \forall r' \in R \setminus \{r_1\}$ . Reste à montrer que :

$(r_2, \alpha(r_2)) \succeq_i (r_1, \alpha(r_1) + 1)$ . Supposons le contraire, c'est-à-dire :

$$(r_1, \alpha(r_1) + 1) \succ_i (r_2, \alpha(r_2)) \quad (3.4.4)$$

On aura :

$$(r_1, \alpha(r_1)) \succ_i (r_2, \alpha(r_2))$$

et en utilisant (3.4.3), on obtient :

$$(r_1, \alpha(r_1)) \succeq_i (r', \alpha(r')), \quad \forall r' \in R_0 = R.$$

Ainsi,  $i$  serait dans  $B_0(r_1)$ . Or d'après (3.4.4),  $(r_1, \alpha(r_1) + 1) \succ_i (r_2, \alpha(r_2))$ , toujours en utilisant (3.4.3), on aura :  $(r_1, \alpha(r_1) + 1)$  apparaît dans  $T^i$  (car

$(r_2, \alpha(r_2))$  apparaît dans  $T^i$ ). Or,  $i$  n'a pas été retenue dans  $A_0(r_1)$ . Il s'en suit que tous les joueurs  $j$  de  $A_0(r_1)$  sont tels que  $(r_1, \alpha(r_1) + 1)$  apparaît dans  $T^j$ . Ceci est absurde car sinon  $\alpha(r_1) \geq \alpha(r_1) + 1$  (c'est-à-dire qu'il y aura au moins  $\alpha(r_1) + 1$  jouent  $j$  ayant  $(r_1, \alpha(r_1) + 1)$  dans  $T^j$ ). Or, ceci est impossible.

$$\text{d'où } (r_2, \alpha(r_2)) \succeq_i (r_1, \alpha(r_1) + 1)$$

Donc, on a : pour tout  $i \in A_1(r_2)$ ,  $(r_2, \alpha(r_2)) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1)$ ,  $\forall r' \in R$ .

De manière générale, pour tout  $i \in A_k(r_{k+1})$ , nous avons par définition de  $B_k(r_{k+1})$  :  $(r_{k+1}, \alpha(r_{k+1})) \succeq_i (r', \alpha(r'))$ ,  $\forall r' \in R_k$ , avec  $R_k = R \setminus \{r_1, \dots, r_k\}$ .

$$\text{Donc } (r_{k+1}, \alpha(r_{k+1})) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1), \forall r' \in R \setminus \{r_1, \dots, r_k\}.$$

Un raisonnement analogue à celui pour  $\sigma_i^* = r_2$ , montre que :

$$(r_{k+1}, \alpha(r_{k+1})) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1), \quad \forall r' \in \{r_1, \dots, r_k\}$$

Finalement, pour tout  $i \in A_k(r_{k+1})$ ,  $(r_{k+1}, \alpha(r_{k+1})) \succeq_i (r', \alpha(r') + 1)$ ,  $\forall r' \in R$ .

Ce qui montre que  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash. ■

L'exemple suivant illustre la démarche suivie dans la preuve précédente et montre comment construire facilement un équilibre de Nash dans les jeux à partition exacte :

**Exemple 3.12.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les préférences individuelles soient résumées par le tableau suivant :

$T^1$	$4a$	$2c$	$c$	$3a$	$2a$	$a$
$T^2$	$4c$	$2b$	$3c$	$2c$	$b$	$c$
$T^3$	$b$	$c$	$4a$	$3a$	$2a$	$a$
$T^4$	$3c$	$2a$	$2c$	$b$	$a$	$c$
$T^5$	$2c$	$3a$	$c$	$2a$	$b$	$a$
$T^6$	$3a$	$2a$	$a$	$2c$	$c$	$b$

En appliquant notre proposition, nous pouvons trouver facilement le vecteur de congestion et aussi tous les équilibres de Nash. Nous avons alors,  $\alpha(a) = 3$ ,  $\alpha(b) = 1$  et  $\alpha(c) = 2$ , donc  $\alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(c) = 6$ , il s'agit donc d'un jeu à partition exacte. Tous les équilibres de Nash de ce jeu sont représenté obligatoirement par un vecteur de congestion  $(3a, b, 2c)$ . À partir de ce vecteur, nous pouvons trouver tous les équilibres de Nash du jeu, en examinant le classement des couples  $(a, 3)$ ,  $(b, 1)$  et  $(c, 2)$  c'est-à-dire,  $3a$ ,  $b$  et  $2c$  dans les préférences de chaque joueur :

$T^1$  :  $b \prec_1 2c \prec_1 3a \rightsquigarrow$  joueur 1 peut choisir  $a$  ou  $c$  car  $n_a \succ_1 n_b + 1$ ,  $n_a \succ_1 n_c + 1$ ,  $n_c \succ_1 n_a + 1$  et  $n_c \succ_1 n_b + 1$ ).

$T^2$  :  $3a \prec_2 2c \prec_2 b \rightsquigarrow$  joueur 2 peut choisir  $b$  ou  $c$ .

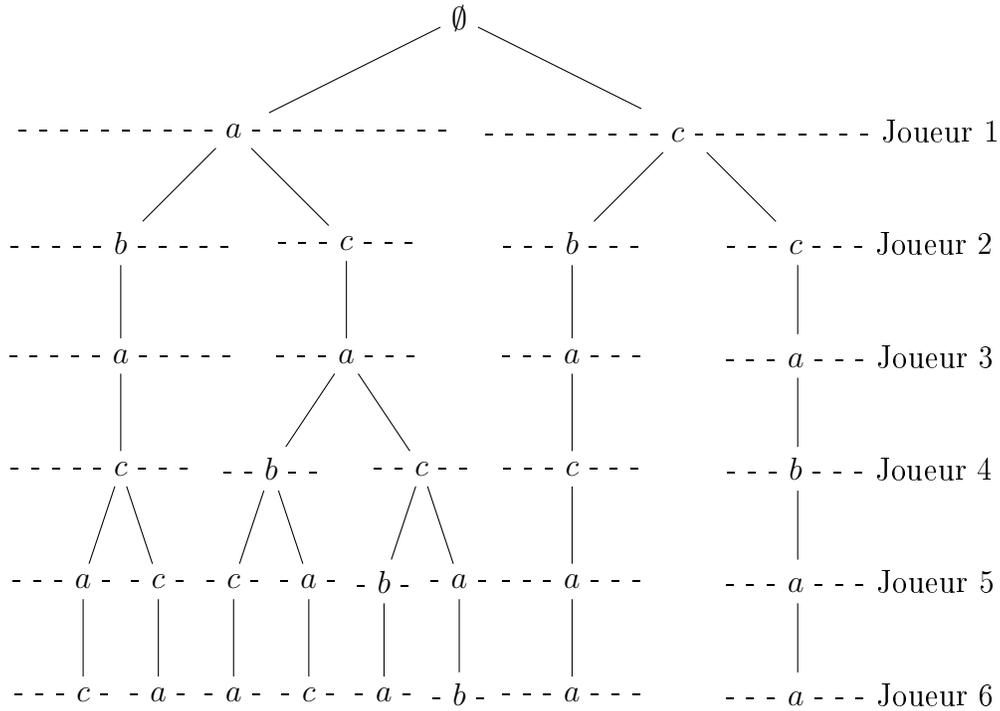
$T^3$  :  $2c \prec_3 b \prec_3 3a \rightsquigarrow$  joueur 3 choisit seulement  $a$ .

$T^4$  :  $3a \prec_4 2c \prec_4 b \rightsquigarrow$  joueur 4 peut choisir  $b$  ou  $c$ .

$T^5$  :  $2c \prec_5 3a \prec_5 b \rightsquigarrow$  joueur 5 peut choisir  $b$ ,  $c$  ou  $a$ .

$T^6$  :  $3a \prec_6 2c \prec_6 b \rightsquigarrow$  joueur 6 peut choisir  $b$ ,  $c$  ou  $a$ .

Nous pouvons alors construire l'arbre suivant afin de détecter tous les équilibres de Nash :



Cet arbre se lit de la manière suivante : le joueur 1 a deux choix possibles :  $a$  et  $c$ . Si le joueur 1 choisit le bien  $a$ , le joueur 2 a deux choix possibles  $b$  ou  $c$ . Si le joueur 2 choisit  $b$ , le joueur 3 ne peut que choisir  $a$ , le joueur 4 doit choisir  $c$ , le joueur 5 a deux choix possibles  $a$  ou  $c$ . Si le joueur 5 choisit  $a$ , alors le joueur 6 doit choisir seulement le bien  $c$  (en respectant toujours le nombre de bien à choisir  $\alpha(a) = 3$ ,  $\alpha(b) = 1$  et  $\alpha(c) = 2$ ). En appliquant le parcours en profondeur de l'arbre, c'est à dire, en parcourant du haut vers le bas de la branche la plus à gauche de l'arbre, On obtient le premier équilibre de Nash  $\sigma_1 = (a, b, a, c, a, c)$ . De la même manière, on obtient le reste des équilibres de Nash :  $\sigma_2 = (a, b, a, c, c, a)$ ,  $\sigma_3 = (a, c, a, b, c, a)$ ,  $\sigma_4 = (a, c, a, b, a, c)$ ,  $\sigma_5 = (a, c, a, c, b, a)$ ,  $\sigma_6 = (a, c, a, c, a, b)$ ,  $\sigma_7 = (c, b, a, c, a, a)$ ,  $\sigma_8 = (c, c, a, b, a, a)$ .

### 3.4.3 Un cas particulier de jeux de congestion avec partition non exacte

La démarche suivie dans l'exemple précédent ne fonctionne que lorsque la partition est exacte. Quand le jeu n'est pas à partition exacte, il n'est pas toujours facile de trouver un vecteur de congestion correspondant à un équilibre de Nash, on ne peut donc pas appliquer les mêmes étapes précédentes pour aboutir à un équilibre de Nash. Cependant, il existe des cas de jeu avec partition non exacte pour lesquels il suffit de modifier légèrement la méthode décrite ci-dessus pour obtenir un vecteur de congestion associant à un équilibre de Nash et déterminer tous les équilibres correspondants à ce vecteur. Il s'agit donc de jeu pour lequel on a :  $\sum_{r \in R} \alpha(r) = n + 1$ .

Nous allons introduire un exemple qui décrit le cas où il y a une partition non exacte.

**Exemple 3.13.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les préférences individuelles  $T^i$  soient données par le tableau suivant :

$T^1$	$4a$	$2c$	$c$	$3a$	$2a$	$a$
$T^2$	$2c$	$c$	$3a$	$b$	$2a$	$a$
$T^3$	$3a$	$b$	$2a$	$2c$	$c$	$a$
$T^4$	$2c$	$3a$	$c$	$2a$	$a$	$b$
$T^5$	$2a$	$a$	$2c$	$c$	$2b$	$b$
$T^6$	$2a$	$a$	$2b$	$b$	$2c$	$c$

Nous avons  $\alpha(a) = 3$ ,  $\alpha(b) = 2$  et  $\alpha(c) = 2$ , donc  $\sum_{r \in R} \alpha(r) = \alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(c) = 7 > n = 6$ , la partition est donc non exacte. Nous devons transformer cette partition en une partition exacte, avec l'intention de déterminer un

vecteur de congestion permettant de trouver (au moins) un équilibre de Nash. Comment ? Il s'agit essentiellement de réorganiser les trois termes  $3a$ ,  $2b$  et  $2c$  à partir du tableau précédent. Nous obtenons le classement suivant :

$$T^1 : 2b \prec_1 2c \prec_1 3a$$

$$T^2 : 2b \prec_2 c \prec_2 3a$$

$$T^3 : 2b \prec_3 3a \prec_3 2c$$

$$T^4 : 2b \prec_4 2c \prec_4 3a$$

$$T^5 : 3a \prec_5 2c \prec_5 2b$$

$$T^6 : 3a \prec_6 2b \prec_6 2c$$

Comme il n'y a que six joueurs et que  $\alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(c) = 7$ , on a obligatoirement :  $3a$  qui apparaît au plus deux fois aux premières positions et ou  $2b$  qui apparaît au plus une fois aux premières positions ou  $2c$  qui apparaît au plus une fois aux premières positions. Dans le cas présent, nous voyons que  $2b$  apparaît qu'une fois aux premières positions.

Nous pouvons maintenant faire comme si la partition était exacte, avec  $\alpha(a) = 3$ ,  $\alpha(b) = 1$  et  $\alpha(c) = 2$  ( $\alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(c) = 6$ ). Il suffit ensuite de procéder comme dans l'exemple précédent. Nous avons alors :

$$T^1 : b \prec_1 2c \prec_1 3a \rightsquigarrow \text{joueur 1 peut choisir } a \text{ ou } c \text{ car } n_a \succ n_b + 1, n_a \succ n_c + 1, n_c \succ n_a + 1 \text{ et } n_c \succ n_b + 1.$$

$$T^2 : 2c \prec_2 3a \prec_2 b \rightsquigarrow \text{joueur 2 peut choisir } b, a \text{ ou } c.$$

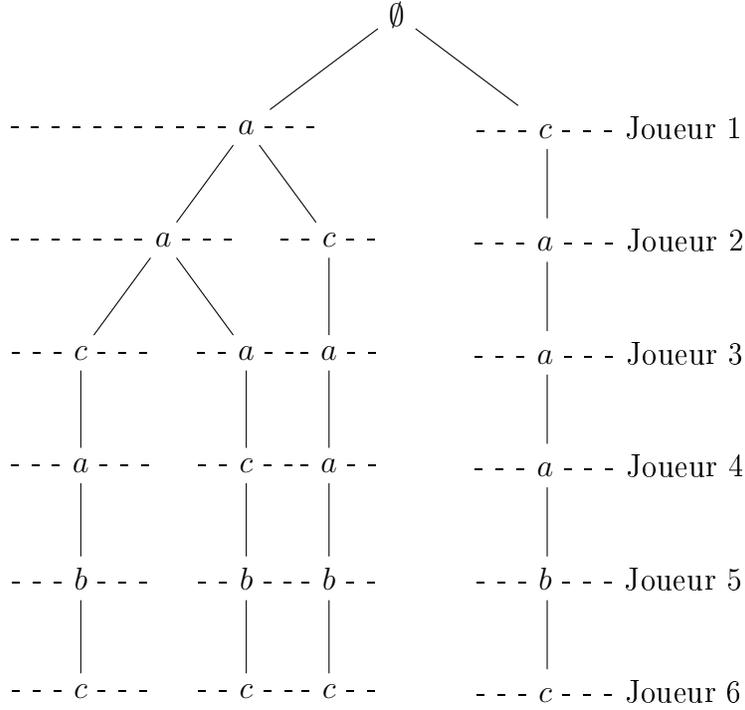
$$T^3 : 3a \prec_3 b \prec_3 2c \rightsquigarrow \text{joueur 3 peut choisir } a, b \text{ ou } c.$$

$$T^4 : 2c \prec_4 3a \prec_4 b \rightsquigarrow \text{joueur 4 peut choisir } a, b \text{ ou } c.$$

$$T^5 : 3a \prec_5 2c \prec_5 b \rightsquigarrow \text{joueur 5 choisit } b.$$

$$T^6 : 3a \prec_6 b \prec_6 2c \rightsquigarrow \text{joueur 6 peut choisir } b \text{ ou } c.$$

Ceci permet de construire l'arbre suivant :



Les équilibres de Nash décrits par cet arbre sont donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= (a, a, a, c, b, c), \quad \sigma_2^* = (a, c, a, a, b, c), \\ \sigma_3^* &= (c, a, a, a, b, c), \quad \sigma_4^* = (a, a, c, a, b, c). \end{aligned}$$

**Remarque 3.6.** Dans l'exemple 4.8, nous avons considéré des jeux avec, à chaque fois une seule configuration des préférences des joueurs. La méthode que nous avons proposée fonctionne même lorsqu'il y a plusieurs configurations possibles et lorsque la partition reste exacte pour chacune de ces configurations, c'est-à-dire, lorsque les préférences comportent des égalités. Dans ce cas, pour trouver tous les équilibres de Nash, il suffit de considérer toutes les configurations possibles et d'appliquer la démarche présentée dans les deux exemples. Notons aussi que dans le cas d'une partition exacte avec  $\sum_{r \in R} \alpha(r) = n + 1$ , il peut y avoir plusieurs vecteurs de congestion. Il suffit alors de considérer

chacun de ces vecteurs de congestion et de lui appliquer la démarche décrite dans l'exemple 4.9. Signalons par ailleurs que la méthode décrites dans les deux exemples ne fonctionne plus pour des jeux avec  $\sum_{r \in R} \alpha(r) \succeq n + 2$ .

### 3.4.4 Le cas général

La méthode que nous venons de présenter n'est malheureusement pas applicable à n'importe quel jeu de congestion à choix unique. En effet, il existe des jeux à partition non exacte où la démarche précédente ne fonctionne pas. Dans ce qui suit, nous proposons une nouvelle preuve (assez simple) du résultat de Milchtaich. Cette preuve contient implicitement une nouvelle méthode qui permet de construire facilement un équilibre de Nash sans passer par les processus d'amélioration utilisés dans la littérature. Pour cela, nous aurons besoin des deux notions suivantes.

**Définition 3.5.** Soient  $G(N \cup \{n+1\}, R, (\preceq_i)_{i \in N \cup \{n+1\}})$  un jeu de congestion à choix unique (à  $n + 1$  joueurs). Soient  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  un équilibre de Nash du jeu restreint à  $N$ ,  $G(N, R, (\preceq_i)_{i \in N})$ , et  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  le vecteur de congestion associé à cet équilibre. Pour chacun des joueurs  $i$  de  $N$ , on compare les stratégies  $(\alpha_1 + 1)r_1, (\alpha_2 + 1)r_2, \dots$  et  $(\alpha_m + 1)r_m$ , et on note  $p(i)$  le bien (ou l'un des biens) qui sera classé premier dans cette comparaison, et  $\alpha_{p(i)}$  le nombre de congestion associé à ce bien dans le vecteur  $v$ . On a donc :  $\forall i \in N, \forall r_j \in R, (\alpha_{p(i)} + 1)p(i) \succsim_i (\alpha_j + 1)r_j$ .

1. On dit qu'un sous-ensemble  $E$  de  $N$  est la base d'un cycle (ou permutation), ou encore que les joueurs de  $E$  sont impliqués dans un cycle, si :  $E = \{i_1, \dots, i_t\}$ , avec  $t \geq 2$ ,  $p(i_s) = \sigma_{i_{s+1}}$  pour tout  $1 \leq s \leq t - 1$ , et  $p(i_t) = \sigma_{i_1}$ .

2. On dit qu'un sous-ensemble  $E$  de  $N$  est la base d'un chaîne (ou anti-cycle), ou encore que les joueurs de  $E$  sont impliqués dans une chaîne, si :  $E = \{i_1, \dots, i_t\}$ , avec  $t \geq 1$ ,  $p(i_s) = \sigma_{i_{s+1}}$  pour tout  $1 \leq s \leq t - 1$ , et  $p(i_t) \notin \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_t}\}$ . Le bien  $p(i_t)$  sera appelé point terminal de la chaîne, sinon on dira qu'il s'agit d'un point intérieur. La chaîne sera dite maximale s'il n'est pas possible de la prolonger en une autre chaîne (en un cycle) à partir de son point terminal.

Notons que lorsqu'il existe plusieurs chaînes maximales, le point terminal de l'une ne peut pas être un point intérieur de l'une des autres. Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le dernier résultat de ce chapitre.

**Proposition 3.4.4.** *Tout jeu de congestion à choix unique (symétrique, antisymétrique avec partition exacte ou non) possède au moins un équilibre de Nash.*

**Preuve.** On procède par récurrence sur le nombre de joueurs. Pour  $n = 1$ , il y a toujours un équilibre de Nash, c'est celui constitué par le bien préféré par ce joueur. Supposons que la propriété soit vraie pour  $n$  joueurs, c'est-à-dire, qu'il y a toujours au moins un équilibre de Nash pour tout jeu de congestion à choix unique impliquant  $n$  joueurs (Hypothèse de récurrence). Montrons maintenant que la propriété est vraie pour  $n+1$ . Soit un jeu avec  $n+1$  joueurs (et  $m$  biens). Considérons le jeu obtenu en supprimant le dernier joueur. Nous avons donc un jeu à  $n$  joueurs. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un équilibre de Nash pour ce jeu. Soit  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  cet équilibre et soit  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  le vecteur de congestion associé à cet équilibre. Pour trouver un équilibre de Nash dans le jeu à  $n+1$  joueurs, nous comparons, pour chacun des  $n+1$  joueurs, les

stratégies  $(\alpha_1 + 1)r_1, (\alpha_2 + 1)r_2, \dots$  et  $(\alpha_m + 1)r_m$ . Comme il y a  $n + 1$  premières places, l'une (au moins) des stratégies  $(\alpha_j + 1)r_j$  apparaît (au moins)  $(\alpha_j + 1)$  fois à la première place. Pour tout joueur  $i$  dans  $\{1, \dots, n + 1\}$ , on notera  $p(i)$  le bien (ou l'un des biens) qui sera classé premier dans cette comparaison. Nous affectons alors les  $n + 1$  joueurs sur les  $m$  biens, pour obtenir un profil  $\sigma^*$ , en suivant le processus suivant (voir les exemples à la suite de la preuve pour une illustration de ce processus) :

1. Pour le joueur  $n + 1$ ,  $\sigma_{n+1}^* = p(n + 1)$ . Pour tout  $i \in N = \{1, \dots, n\}$ , si  $p(i) = \sigma_i$ , alors  $\sigma_i^* = p(i)$ .
2. Parmi les joueurs non concernés par l'étape précédente, on cherche une première base d'un cycle :  $E = \{i_1, \dots, i_t\}$ . On pose alors :  $\sigma_{i_s}^* = \sigma_{i_{s+1}}$  pour tout  $1 \leq s \leq t - 1$ , et  $\sigma_{i_t}^* = \sigma_{i_1}$ . Notons que dans ce cas, les stratégies des joueurs de  $E$  dans le profil  $\sigma^*$  sont obtenues par une simple permutation de leurs stratégies dans  $\sigma$ . On cherche, ensuite, une autre base de cycle dans l'ensemble des joueurs restants, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus de cycles.
3. Si tous les joueurs ont été concernés par l'une des deux étapes précédentes, le processus d'arrête et le seul bien dont le nombre de congestion aura augmenté est  $p(n + 1)$ . Sinon, il ne restera que des bases de chaînes maximales. Il y a alors deux cas :
  - a) Si le bien  $p(n + 1)$  n'apparaît dans aucune de ces chaînes, ou s'il n'apparaît que comme point terminal, on pose, pour tout joueur  $i$  impliqué dans une chaîne,  $\sigma_{i_s}^* = \sigma_{i_s}$ . Là encore, le seul bien dont le nombre de congestion aura augmenté est  $p(n + 1)$ .
  - b) Si  $p(n + 1)$  apparaît dans une ou plusieurs chaînes comme un point in-

térieur, on choisi l'une quelconque de ces chaînes, disons  $E = \{i_1, \dots, i_t\}$  et  $\sigma(i_k) = p(n+1)$  avec  $1 \leq k \leq t$ . Dans ce cas, on pose :  $\sigma_{i_s}^* = \sigma_{i_s}$  pour tout  $s < k$  et  $\sigma_{i_s}^* = pi_s$  pour tout  $s \geq k$ . Pour tous les joueurs impliqués dans les autres chaînes, on pose  $\sigma_{i_s}^* = \sigma_{i_s}$ . Notons que dans ce cas, le seul bien dont le nombre de congestion aura augmenté est le point terminal de la chaîne  $E$ .

Nous obtenons ainsi un profil de stratégies  $\sigma^*$  dont le vecteur de congestion associé a les mêmes composantes que le vecteur  $v$ , sauf que l'une d'elles aura augmenté d'une unité. Supposons que c'est la composante  $k$  (correspondant au bien  $k$ ) qui passe de  $\alpha_k$  à  $\alpha_k + 1$ . Montrons que  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash pour le jeu à  $n + 1$  joueurs. Soit  $i$  un joueur quelconque dans  $\{1, \dots, n + 1\}$ . Si  $i$  est l'un des joueurs jouant la stratégie  $r_k$ , alors  $(\alpha_k + 1)r_k$  arrive en première position dans les préférences de ce joueur. On a donc :  $(\alpha_k + 1)r_k \succeq_i (\alpha_j + 1)r_j, \forall r_j \in R$ . Supposons maintenant que le joueur  $i$  joue un bien  $r_t$  autre que  $r_k$ . D'après le processus décrit plus haut,  $(\alpha_t + 1)r_t$  arrive en première position (devant tous les autres  $(\alpha_j + 1)r_j$ ) dans les préférences de  $i$  ou  $r_t$  est la stratégie de  $i$  dans l'équilibre  $\sigma$  du jeu à  $n$  joueurs. Dans les deux cas, en utilisant la décroissance des préférences en fonction du nombre de joueurs, nous avons :  $(\alpha_t)r_k \succeq_i (\alpha_j + 1)r_j, \forall r_j \in R$  et  $(\alpha_t)r_k \succeq_i (\alpha_k + 2)r_k$ . Ce qui montre que  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash. ■

À titre illustratif, nous présentons trois exemples qui expliquent la méthode que nous proposons pour déterminer (au moins) un équilibre de Nash dans les jeux de congestion à choix unique non symétriques. Les deux premiers exemples sont destinés à illustrer le processus permettant de passer d'un équilibre à  $n$

joueurs à un équilibre de  $n + 1$  joueurs. Le dernier exemple, plus complet, part d'un jeu de congestion non symétrique et décrit toutes les étapes qui mènent à un équilibre de Nash de ce jeu.

**Exemple 3.14.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que le vecteur de congestion, pour le jeu impliquant les six premiers joueurs soient  $v = (2a, 2b, 2c)$  et que l'équilibre de Nash soit le profil  $(a, a, b, b, c, c)$ . Cet équilibre est représenté par la première colonne (à six cases). On cherche maintenant un équilibre de Nash pour  $n = 7$ . On doit donc, pour chaque joueur, comparer  $3a$ ,  $3b$  et  $3c$ . Supposons que les premières places, dans ces comparaisons, soient celles inscrites dans la deuxième colonne (à sept cases).

$$v \quad n = 7$$

$2a$	$3a$	$\rightarrow J_1$
$2a$	$3b$	$\rightarrow J_2$
$2b$	$3b$	$\rightarrow J_3$
$2b$	$3a$	$\rightarrow J_4$
$2c$	$3a$	$\rightarrow J_5$
$2c$	$3c$	$\rightarrow J_6$
$3a$		$\rightarrow J_7$

En suivant le processus décrit dans la preuve précédente et en appliquant la première règle, le joueur 1 (resp, 3, 6 et 7) jouera le bien  $a$  (resp,  $b$ ,  $c$  et  $a$ ). Utilisant maintenant la deuxième règle, les joueurs 2 et 4 sont impliqués dans

un cycle :  $2a \rightarrow 3b$  ( $J_2$ ),  $2b \rightarrow 3a$  ( $J_4$ ) (la notation  $2a \rightarrow 3b$  ( $J_2$ ) indique que, pour le joueur 2, la case de la première colonne contient  $2a$  et la case de la deuxième colonne contient  $3b$ ). Alors, le joueur 2 joue  $b$  et le joueur 4 joue  $a$ . Il ne reste plus que la chaîne impliquant le joueur 5 :  $2c \rightarrow 3a$  ( $J_5$ ). D'après la troisième règle le joueur 5 jouera le bien  $c$ . On vérifie alors que le profil  $(a, b, b, a, c, c, a)$  est un équilibre de Nash.

**Exemple 3.15.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  et  $R = \{a, b, c, d\}$ . On suppose que le vecteur de congestion, pour le jeu impliquant les dix premiers joueurs soit  $v = (3a, 4b, 2c, d)$  et que l'équilibre de Nash soit le profil  $\sigma = (a, a, a, b, b, b, b, c, c, d)$ . On cherche maintenant un équilibre de Nash pour onze joueurs. En supposant que les comparaisons pour  $(4a, 5b, 3c$  et  $2d)$  donnent les premières places inscrites dans la deuxième colonne.

$$v \quad n = 11$$

$3a$	$3c$	$\rightarrow J_1$
$3a$	$2d$	$\rightarrow J_2$
$3a$	$2d$	$\rightarrow J_3$
$4b$	$5b$	$\rightarrow J_4$
$4b$	$5b$	$\rightarrow J_5$
$4b$	$3c$	$\rightarrow J_6$
$4b$	$3c$	$\rightarrow J_7$
$2c$	$4a$	$\rightarrow J_8$
$2c$	$4a$	$\rightarrow J_9$
$d$	$4a$	$\rightarrow J_{10}$
	$5b$	$\rightarrow J_{11}$

En Adoptant toujours le processus décrit dans la preuve précédente, les joueurs 4, 5 et 11 choisiront  $b$  (règle 1). Parmi les joueurs restants, nous avons deux situations cycliques (permutations). La première implique les joueurs 1 et 9 :  $3a \rightarrow 3c$  ( $J_1$ ),  $2c \rightarrow 4a$  ( $J_9$ ). La deuxième implique les joueurs 2 et 10 :  $3a \rightarrow 2d$  ( $J_2$ ),  $d \rightarrow 4a$  ( $J_{10}$ ). D'après la deuxième règle, les joueurs 1 et 9 jouent respectivement  $d$  et  $a$ , et les joueurs 2 et 10 jouent respectivement  $d$  et  $a$ . Il ne reste plus que deux situations en chaînes maximales, la première implique les joueurs 6, 8 et 3 :  $4b \rightarrow 3c$  ( $J_6$ ),  $2c \rightarrow 4a$  ( $J_8$ ),  $3a \rightarrow 2d$  ( $J_3$ ). La

deuxième implique uniquement le joueur 7 :  $4b \rightarrow 3c$  ( $J_7$ ). D'après la troisième règle, le joueur 7 joue  $b$  et les joueurs 6, 8, 3 jouent respectivement  $c$ ,  $a$  et  $d$ . On obtient ainsi le profil  $(c, d, d, b, b, c, b, a, a, a, b)$  et on vérifie facilement qu'il s'agit d'un équilibre de Nash.

**Exemple 3.16.** Soient  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ . Supposons que les préférences individuelles  $T^i$  soient résumées par le tableau suivant :

$T^1$	$3a$	$2a$	$2b$	$b$	$a$
$T^2$	$3a$	$2c$	$c$	$2a$	$a$
$T^3$	$2c$	$c$	$3b$	$2b$	$b$
$T^4$	$3a$	$2a$	$2b$	$a$	$b$
$T^5$	$2b$	$b$	$2c$	$c$	$a$

D'après ces préférences individuelles, on peut trouver facilement un équilibre de Nash en suivant le processus décrit dans la preuve précédente.

$n = 1$	$v$	$n = 2$	$v$	$n = 3$	$v$	$n = 4$	$v$	$n = 5$	
$a$	$a$	$b$	$b$	$2b$	$2b$	$2a$	$2b$	$3a$	$\rightarrow J_1$
		$2a$	$a$	$2a$	$a$	$2a$	$2a$	$c$	$\rightarrow J_2$
				$2b$	$2b$	$3b$	$2b$	$3b$	$\rightarrow J_3$
						$2a$	$2a$	$3a$	$\rightarrow J_4$
								$c$	$\rightarrow J_5$

- Pour le joueur 1, l'équilibre de Nash est  $(a)$ .
- Pour les joueurs 1 et 2, l'équilibre de Nash obtenu à l'étape précédente a pour vecteur de congestion  $v = (a)$ . On compare, pour chacun des joueurs 1 et 2, les stratégies  $2a$ ,  $b$  et  $c$ . On voit que le joueur 1 (resp, 2) choisira  $b$  (resp,  $a$ ). On conclut que le nouveau équilibre de Nash est  $(b, a)$ .
- Pour les joueurs 1, 2 et 3, on compare  $2a$ ,  $2b$  et  $c$ . D'après la cinquième colonne de comparaison, on voit que le nouveau équilibre de Nash pour trois joueurs est  $(b, a, b)$ .
- Pour les joueurs 1, 2, 3 et 4. D'après la septième colonne de comparaison, on voit que le joueur 2 et 4 choisiront  $a$  et le joueur 3 choisira  $b$ . Il suffit alors de faire jouer la stratégie  $b$  au joueur 1. Le nouveau équilibre de Nash pour  $n = 4$  est  $(b, a, b, a)$ .
- De la même façon, on voit que l'équilibre de Nash pour  $n = 5$  est  $(b, a, b, a, c)$ .

### 3.5 Conclusion

Les résultats que nous avons obtenus dans ce chapitre prolongent et généralisent l'étude entreprise dans le chapitre précédent. Nous avons commencé par l'étude de cas des deux ressources. Nous pouvons considérer que notre analyse de ce cas est complète, car la méthode que nous avons développé nous a conduit à la description de la structure générale des équilibres de Nash et à l'identification de tous équilibres. Dans le cas de plus de deux biens, nous avons

étendu la notion de séquence des  $n$  derniers termes aux jeux de congestion à choix unique non symétriques. Ensuite, nous avons introduit la notion de configuration pour traiter tous les cas qui peuvent être induits par des situations d'ex-aequo dans les préférences individuelles. Ce qui nous a permis, encore une fois, de simplifier l'analyse et de la restreindre à l'étude à un simple tableau représentant les "parties" pertinentes des fonctions d'utilité ordinales. Cette réduction du cadre d'analyse visait un objectif double : proposer une preuve simple du théorème de Milchtaich et élaborer une méthode (un algorithme) susceptible de décrire tous les équilibres de Nash dans un jeu de congestion à choix unique. Le premier objectif a été atteint avec la preuve de la proposition 4.6.1, puisque nous avons pu établir ce résultat de manière simple et directe, sans faire appel à aucun mécanisme d'amélioration. En revanche, nous n'avons pu apporter qu'une réponse partielle à la seconde question, en isolant la classe des jeux à partition exacte et en proposant, pour cette classe, une méthode décrivant tous les équilibres de Nash. Le problème de la description exhaustive des équilibres de Nash dans le cas non symétrique (pour  $m \geq 3$ ) reste donc ouvert.

# Chapitre 4

## Applications des jeux de congestion

Ce chapitre a pour objectif de présenter les modèles d'application dans les jeux de congestion. Nous allons présenter en détail les problématiques de "routage" (ayant trait aux réseaux routiers) à travers un cas d'application simple au moyen d'un jeu de congestion. Mais avant cela, nous allons exposer le modèle de jeu de congestion réseau de manière accessible, puis le généraliser et tenter de donner les équilibres de Nash, notamment grâce aux différents concepts présentés dans les deux précédents chapitres. Ensuite, nous allons argumenter et déterminer des équilibres de Nash dans les allocations des tâches. Finalement, nous discuterons le concept de prix de l'anarchie, suite de jeu de congestion réseau.

### 4.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà signalé dans les chapitres précédents, les jeux de congestion permettent de décrire, de modéliser, et d'analyser des situations diverses. Ces différentes situations comprennent divers cas associés à certains

problèmes quant aux réseaux routiers, à l'affectation des tâches (notamment en ce qui concerne les réseaux informatiques<sup>1</sup>) ou encore quant aux allocations de ressources. Ces problématiques, ne sont pas seulement des cas d'application théorique, mais elles sont fort intéressantes, en matière d'aménagement du territoire notamment. En effet, dans un rapport confié au Ministère des Transports, de l'Équipement et du Logement [10], il est fait usage des jeux de congestion dans une tentative visant à déterminer le choix d'un itinéraire. Ce rapport visait à comprendre la formation de la congestion sur un réseau routier<sup>2</sup> et à fournir si possible, des solutions à ces problèmes d'encombrement. Les problèmes d'encombrement des réseaux routiers sont un cas typique de jeux de congestion, puisque ceci suggère que l'utilité des usagers soit décroissante avec leur nombre.

## 4.2 Intérêt des jeux de congestion

Rosenthal [57] a proposé deux applications pratiques des jeux de congestion, l'une concernant les réseaux routiers, l'autre, la production en usine. Dans le premier cas, on peut penser que le coût de déplacement sur une route dépend positivement du nombre de personnes utilisant celle-ci. Plus le coût est important, moins l'utilisateur en retire une utilité : son utilité dépend donc négativement du nombre de personnes utilisant la même route que lui. Dans le second cas, plusieurs entreprises produisent un bien en utilisant différentes ressources et techniques de production. Le coût d'une ressource dépend du

---

1. La congestion d'un réseau informatique est la condition dans laquelle une augmentation du trafic provoque un ralentissement global de celui-ci.

2. La congestion d'un réseau routier est la condition dans laquelle une augmentation du trafic de véhicules provoque un ralentissement global de celui-ci.

nombre d'entreprises qui l'utilisent, ce qui fait que les profits d'une entreprise dépendent négativement du nombre d'entreprises utilisant la même ressource qu'elle. Cependant, ces deux exemples ne sont pas les seuls cas d'application possibles. Il existe bien d'autres, notamment en ce qui concerne l'encombrement de réseaux informatiques. Milchtaich [41] a proposé des applications en économie quant à l'étude du trafic (routier ou autre), ou encore dans le domaine de l'écologie.

### 4.3 Jeux de réseau

Nous proposons dans cette section, certains cas d'application possibles des jeux de congestion, en formalisant le problème dès le départ sous la forme d'un jeu de congestion réseau. Ce type de jeux représente les problématiques d'encombrement de réseaux routiers. Dans ce qui suit, nous proposons un exemple compréhensible, dans lequel tous les individus ont les mêmes fonctions d'utilité (cas symétrique). Ensuite, nous tenterons de généraliser cet exemple en considérant que les agents n'ont pas la même fonction d'utilité (cas non symétrique).

**Définition 4.1.** Un *jeu de congestion réseau* est un tuple  $(N, G, (d_e)_{e \in E})$  défini par :

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ , l'ensemble fini des joueurs.
- $G(V, E)$ , un graphe orienté qui représente la communication du réseau, avec  $V$ , un ensemble fini de noeuds et  $E \subseteq V \times V$ , un ensemble d'arêtes.
- Un couple de ressources  $(s_i, t_i) \in V \times V$  et un noeud trajectoire, pour chaque joueur  $i$  dans  $N$ .

- $d_e$ , l'ensemble des fonctions de coûts de  $E$ . Chaque fonction de coût est associée avec une arête  $e$  dans  $E$ . Pour tout  $e$  dans  $E$ , on a  $d_e : E \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $d_e$  est une fonction monotone non-décroissante.

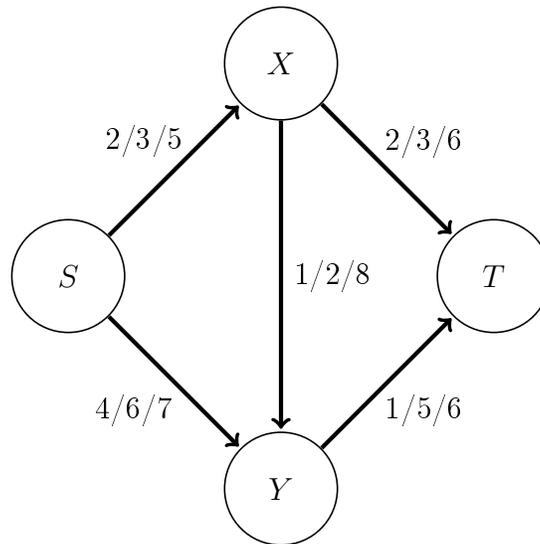
Pour tout  $i$  dans  $N$ , on note  $X_i$ , l'ensemble de toutes les voies (l'espace de stratégie du joueur  $i$ ) du noeud  $s_i$  au noeud  $t_i$ . Chaque joueur  $i$  pourrait choisir une voie  $\sigma_i$  de l'ensemble  $X_i$  et allouer tous les noeuds sur cette voie. Pour un profil  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , et un noeud  $e$  dans  $E$ , on note  $n_e(\sigma)$ , le nombre de joueurs utilisant le noeud  $e$  dans le profil  $\sigma$ . Dans ce cas, le coût (ou le paiement) de chaque joueur  $i \in N$  dans le profil  $\sigma$  est défini comme suit :

$$C_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(n_e(\sigma))$$

### 4.3.1 Application : Jeu de réseau, points de départ et d'arrivée identiques

Nous allons maintenant analyser ce modèle à travers un exemple, dans lequel trois individus doivent se rendre d'un point  $S$  à un point  $T$ , et ce, en ayant à leur disposition plusieurs itinéraires. Le coût du trajet lié, dépend des préférences et du nombre d'individus empruntant un itinéraire précis. Illustrons à présent cet exemple.

**Exemple 4.1.**



Dans cet exemple, nous avons un point de départ  $S$  et un point d'arrivée  $T$  pour les trois joueurs. Les chiffres 2, 3 et 5 sur l'arête  $SX$  représentent le coût du trajet  $SX$  lorsqu'il y a respectivement un, deux ou trois joueurs. De même, les chiffres 2, 3 et 6 sur l'arête  $XT$  représentent le coût du trajet  $XT$  lorsqu'il y a respectivement un, deux ou trois joueurs sur cette arête et de même pour le reste des chiffres. Ces informations peuvent être résumées par les fonctions de paiements suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 d_{SX}(1) = 2 & d_{SX}(2) = 3 & d_{SX}(3) = 5 \\
 d_{XT}(1) = 2 & d_{XT}(2) = 3 & d_{XT}(3) = 6 \\
 d_{XY}(1) = 1 & d_{XY}(2) = 2 & d_{XY}(3) = 8 \\
 d_{SY}(1) = 4 & d_{SY}(2) = 6 & d_{SY}(3) = 7 \\
 d_{YT}(1) = 1 & d_{YT}(2) = 5 & d_{YT}(3) = 6
 \end{array}$$

Dans notre exemple, le graphe  $G = (V, E)$  correspond à :

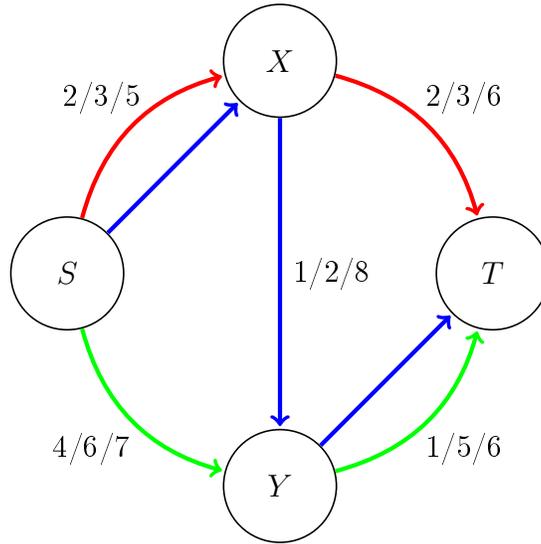
- $V = \{S, T, X, Y\}$  : un ensemble de noeuds.
- $E = \{(SX), (SY), (XY), (XT), (YT)\}$  : un ensemble d'arêtes.

Le sens des flèches sur le graphe permet d'identifier le sens des vecteurs et lui donne ainsi sa qualification "d'orienté".

Essayons à présent de relever les éléments qui permettent de passer de cette représentation graphique à un jeu de congestion. Dans cet exemple, les fonctions d'utilité deviennent des fonctions de coût : l'individu cherchera donc à minimiser cette fonction (et non pas à maximiser comme dans le cas de fonctions d'utilité). Ces fonctions de coûts sont identiques pour tous les joueurs (cas symétrique). Les stratégies, quant à elles, correspondent au choix d'un itinéraire et sont les mêmes pour tous les joueurs. Ces stratégies correspondent à des combinaisons de différents éléments de  $E$  permettant de partir de  $S$  et d'arriver à  $T$ .

Tentons maintenant de reprendre l'exemple précédent avec un ensemble de stratégies  $X_i = \{\{SX, XT\}; \{SX, XY, YT\}; \{SY, YT\}\}$  pour tout joueur  $i$ , et un profil de stratégies  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  avec :

- $\sigma_1$  : l'itinéraire choisi par le joueur 1 ;
- $\sigma_2$  : l'itinéraire choisi par le joueur 2 ;
- $\sigma_3$  : l'itinéraire choisi par le joueur 3.



Autrement dit, le joueur 1 choisit l'itinéraire  $\{(SX), (XT)\}$  (en couleur rouge), le joueur 2, l'itinéraire  $\{(SX), (XY), (YT)\}$  (en couleur bleu) et le joueur 3, l'itinéraire  $\{(SY), (YT)\}$  (en couleur verte). Les fonctions de coûts pour chaque joueur se présentent comme suit :

$$C_1(\sigma) = d_{(SX)}(n_{(SX)}(\sigma)) + d_{(XT)}(n_{(XT)}(\sigma)) = d_{(SX)}(2) + d_{(XT)}(1) = 3 + 2 = 5;$$

$$C_2(\sigma) = d_{(SX)}(2) + d_{(XY)}(1) + d_{(YT)}(2) = 3 + 1 + 5 = 9;$$

$$C_3(\sigma) = d_{(SY)}(1) + d_{(YT)}(2) = 4 + 5 = 9.$$

Il est dès lors simple de poser la question suivante : est-ce qu'il existe un ou plusieurs équilibre(s) de Nash dans cet exemple ? Et si oui, comment peut-on le(s) retrouver ?

Pour la réponse à la première question, nous pouvons tout simplement dire qu'il existe un équilibre de Nash, puisque ce type de jeu correspond à un cas particulier de jeux de congestion standard. Ici, les joueurs disposent de la même fonction d'utilité (la fonction de coût), pour un itinéraire donné. Dans

ce cas, ce jeu est qualifié de jeu de congestion symétrique. Or, nous avons déjà vu dans le chapitre 2 que tout jeu de congestion symétrique admet toujours un équilibre de Nash (théorème de Rosenthal).

Pour savoir comment trouver cet équilibre de Nash, il faut avant tout analyser ce type de jeu pour déterminer quelle est la méthode la plus appropriée permettant d'identifier cet équilibre. Ce jeu n'est pas un jeu à choix unique. En effet, chaque joueur a la possibilité de choisir plusieurs itinéraires à la fois. Partant de cette hypothèse, notre méthode ne peut pas être utilisée. Cependant, on peut tout aussi bien avoir recours à la notion de la fonction de potentiel (Rosenthal) afin d'identifier l'équilibre de Nash de ce jeu qu'à la propriété d'amélioration finie de Milchtaich.

Voyons pourquoi ce jeu ne peut pas être réduit un jeu à choix unique. Supposons que l'itinéraire  $\{SX, XT\}$  constitue un bien unique, noté  $a$ , que l'itinéraire  $\{SX, XY, YT\}$  constitue un bien unique  $b$ , et que  $\{SY, YT\}$  est un bien unique  $c$ . Dans ce cas, nous aurons  $X_i = \{a, b, c\}$ , pour tout  $i$  dans  $N$ . Nous allons voir qu'il est impossible, en tenant compte des données du problème, d'associer des fonctions de paiement aux biens  $a$ ,  $b$  et  $c$ . En effet, considérons les deux profils suivants :  $\sigma = (a, c, c)$  et  $\sigma' = (a, b, c)$ . Soit  $d_a$  la fonction de paiement (coût) associée au bien  $a$ . Pour le profil  $\sigma$ , on a  $d_a(1) = 2 + 2 = 4$ . Dans le profil  $\sigma'$ , on a  $d_a(1) = 3 + 2 = 5$ . On constate que la fonction  $d_a$  dépend, non seulement du nombre de joueurs utilisant le bien  $a$ , mais aussi du profil de stratégies considéré, de même pour les fonctions de paiement  $b$  et  $c$ . Ceci est en contradiction avec la définition d'un jeu de congestion.

Dans l'exemple suivant, nous considérons un cas plus simple : celui d'un jeu de congestion réseau (symétrique) à choix unique où tous les joueurs ont le même point de départ  $A$ , le même point d'arrivée  $B$ , et la même fonction de coût. De plus, nous supposons que toutes les routes qui mènent de  $A$  à  $B$  ne passent par aucun intermédiaire. Ce cas particulier de jeu de congestion réseau est connu dans la littérature sous le nom de jeux de congestion réseau avec liaison parallèle ("*Network congestion games on parallel links*")<sup>3</sup>. Nous montrerons qu'il est possible de trouver facilement tous les équilibres de Nash et d'identifier l'équilibre optimal (un coût global minimum), en utilisant les résultats de la méthode que nous avons proposé dans le chapitre 2.

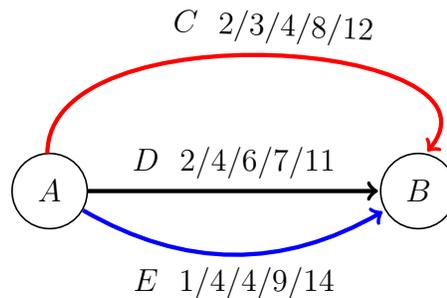
**Exemple 4.2.** Supposons que deux villes  $A$  et  $B$  soient reliées par trois routes  $C$ ,  $D$  et  $E$ . La première ( $C$ ) très large, mais elle fait malheureusement un grand détour et le temps nécessaire pour la parcourir dépend du nombre d'usager qui l'empruntent. La seconde ( $D$ ) est parfaite, mais il faut payer un droit d'utilisation, et le temps nécessaire de la parcourir dépend de nombre de véhicules qui l'empruntent. La troisième ( $E$ ) passe par un pont très étroit et très court, et on peut le parcourir en quelques instants à peine, à condition d'être seul sur le pont. Mais plus le nombre de personnes qui empruntent le pont augmente, plus la circulation devient encombrée, et plus le temps de passage augmente.

Pour simplifier cet exemple, supposons qu'il n'y ait que cinq utilisateurs. Les chiffres 2, 3, 4, 8 et 12 sur la voie  $C$  représentent le coût du trajet  $C$  lorsqu'il y a respectivement un, deux, trois, quatre ou cinq joueurs. De même, les chiffres 2, 4, 6, 7 et 11 sur la voie  $D$  représentent le coût du trajet  $D$  lorsqu'il y a respectivement un, deux, trois, quatre ou cinq joueurs sur cette voie et de

---

3. Pour ce type de jeux on peut voir par exemple [38] et [24]

même, pour le reste des chiffres.



La question qui se pose maintenant est la suivante : comment trouver l'équilibre de Nash optimal (c'est-à-dire, celui qui correspond à un coût global minimal) ? Nous allons mettre en pratique le résultat du chapitre 2 concernant les jeux de congestion à choix unique symétriques. Nous commençons d'abord, par transformer les coûts en une fonction d'utilité ordinale (utilité = - coût) :

$$5e \prec 5c \prec 5d \prec 4e \prec 4c \prec 4d \prec 3d \prec 3e \sim 3c \sim 2e \sim 2d \prec 2c \prec c \sim d \prec e.$$

Dans ce cas, les séquences des 5 derniers termes ainsi que les équilibres de Nash correspondant s'écrivent comme suit :

$$T_1 = \{e, d, c, 2c, 2d\} \rightarrow \sigma_1^* = (e, 2c, 2d)$$

$$T_2 = \{e, d, c, 2c, 2e\} \rightarrow \sigma_2^* = (d, 2c, 2e)$$

$$T_3 = \{e, d, c, 2c, 3c\} \rightarrow \sigma_3^* = (e, d, 3c)$$

Le coût global pour chacun de ses équilibres sont :  $C_1^* = 8$ ,  $C_2^* = 9$  et  $C_3^* = 7$ .

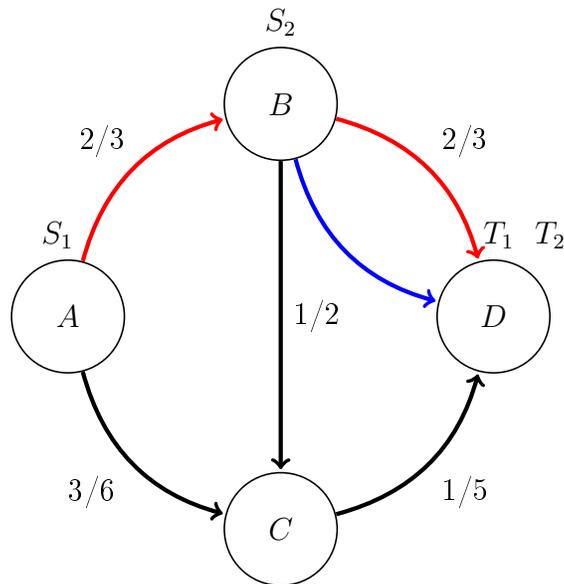
Alors, l'équilibre optimal est  $\sigma_3^* = (e, d, 3c)$ .

### 4.3.2 Application : Jeu de réseau, points de départ différents et points d'arrivée identiques

Dans le jeu de congestion réseau présenté précédemment, tous les joueurs disposaient des mêmes points de départ et d'arrivée. Cette fois-ci, nous généralisons les problèmes de routage à un nombre de joueurs fini pouvant avoir des points de départ différents et d'arrivée identiques.

Illustrons ceci avec un exemple à deux joueurs.

**Exemple 4.3.** Soient  $N = \{1, 2\}$ ,  $R = E$  et  $m = 6$ .



Le graphe  $G = (V, E)$  définit le réseau routier, les arêtes reflétant les différents axes routiers et les sommets pouvant être assimilés à des villes.

Les points  $S_1$  et  $T_1$  (respectivement  $S_2$  et  $T_2$ ) représentent les points de départ et d'arrivée du joueur 1 (respectivement du joueur 2). Comme précédemment, les chiffres sur les différentes arêtes donnent le coût du trajet en fonction du nombre de joueurs qui l'emprunte. Les fonctions de coût sont dé-

finies comme dans l'exemple précédent. Hormis, l'arête  $AC$  représente le coût 3 ou 6 du trajet lorsqu'il y a respectivement un ou deux joueurs.

Comme pour l'exemple précédent, on peut dire qu'il existe au moins un équilibre de Nash. Pour en obtenir un, on peut utiliser, soit la méthode de Rosenthal soit une méthode plus rapide, qui consiste à utiliser les voies d'amélioration de Milchtaich.

**Méthode de Rosenthal :** Dans les jeux de congestion réseau, la fonction de potentiel est définie par :  $P(\sigma) = \sum_{e=1}^m \sum_{k=1}^{n_e(\sigma)} d_r(k)$ , avec  $\sigma$ , un ensemble de chemins.

Cherchons maintenant à déterminer un équilibre de Nash dans le jeu précédent. Supposons que le profil initial  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  n'est pas un équilibre, avec  $\sigma_1 = \{AB, BD\}$  et  $\sigma_2 = \{BD\}$ .

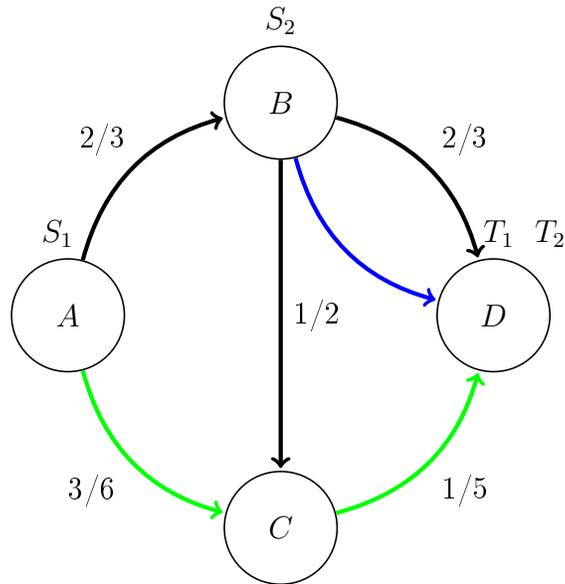
Cependant, le coût de trajet pour chaque joueur est :

$$C_1(\sigma_1) = d_{(AB)}(n_{(AB)}(\sigma)) + d_{(BD)}(n_{(BD)}(\sigma)) = 2 + 3 = 5;$$

$$C_2(\sigma_2) = d_{(BD)}(n_{(BD)}(\sigma)) = 3.$$

Alors la fonction de potentiel de ces trajets est :  $P(\sigma) = 2 + 2 + 3 = 7$ .

Supposons que le joueur 1 modifie son itinéraire et décide de prendre le trajet  $\{AC, CD\}$  (en couleur verte). Dans ce cas, le nouveau profil de stratégies est  $\sigma' = (\{AC, CD\}, BD)$ .



À ce niveau, les coûts pour les joueurs 1 et 2 sont :

$$C_1(\sigma') = d_{(AC)}(n_{(AC)}(\sigma')) + d_{(CD)}(n_{(CD)}(\sigma')) = 3 + 1 = 4;$$

$$C_2(\sigma') = d_{(BD)}(n_{(BD)}(\sigma')) = 2.$$

$$\text{D'où } P(\sigma') = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$\text{Alors } P(\sigma) - P(\sigma') = C_1(\sigma_1) - C_1(\sigma'_1).$$

D'après le théorème de Rosenthal (théorème 2.4.1 de chapitre 2), ce jeu admet un équilibre de Nash.

**Méthode de Milchtaich :** En suivant le mécanisme de Rosenthal, nous avons deux profils de stratégies  $(\{AB, BD\}, BD)$  et  $(\{AC, CD\}, BD)$ . Donc, il est clair que la voie d'amélioration de  $(\{AB, BD\}, BD) \rightarrow (\{AC, CD\}, BD)$  est finie. Dans ce cas de figure, aucun des deux joueurs n'a intérêt à modifier sa stratégie (son itinéraire). Le profil  $(\{AC, CD\}, BD)$  est alors un équilibre de Nash.

## 4.4 Allocation des tâches

Plusieurs travaux ont traité le problème d'allocation des tâches sous différents contextes [58, 63, 64, 65, 70, 69], Christodoulou et *al* [16] ont étudié le problème d'allocation des tâches pour déterminer les équilibres de Nash, soit avec des fonctions de coût linéaires ou non. Ils considèrent que le joueur est responsable d'une tâche et dans ce contexte, son coût correspondra à la date de fin d'exécution de sa tâche.

La formulation générale d'un tel problème est la suivante : On suppose qu'on veuille traiter  $n$  tâches  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  sur  $m$  machines quelconques  $m_r$  ( $r = 1, \dots, m$ ) de vitesses  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . Définissons la charge  $L_i$  d'une machine  $i$  comme la somme des temps d'exécution des tâches qu'elle traite et le coût d'une tâche, comme la charge de la machine l'hébergeant. Le problème général d'allocation de tâches est de trouver une allocation de ces tâches pour que le coût total d'exécution soit minimal.

**Définition 4.2.** Le jeu non coopératif d'allocation de tâches prend la forme suivante :

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ , un nombre  $n$  (fini) de tâches.
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$ , un nombre  $m$  (fini) de machines.
- $X_i$ , un ensemble de machines pouvant héberger la tâche  $i$

L'exécution d'une tâche se traduit par un coût qui varie en fonction de la machine qui exécute la tâche.

Chaque machine  $m_r$  possède une fonction de récompense  $d_{m_r}$  définie sur l'ensemble de tâches  $N$  :

$$d_{m_r} : N \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que  $d_{m_r}(t_i)$  est le coût que la machine  $m_r$  obtiendra si elle exécute la tâche  $t_i$ .

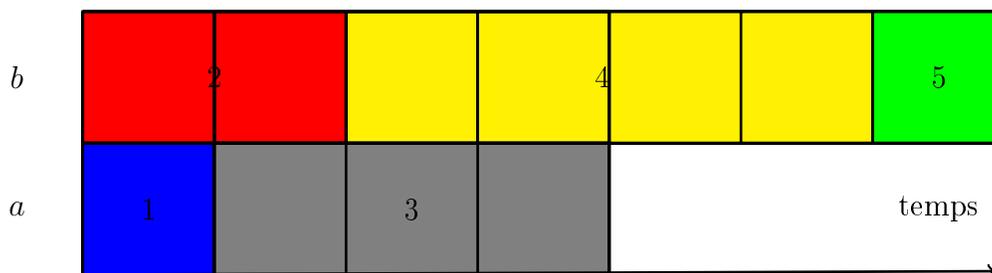
Le coût total  $C_{m_r}$  d'une machine  $m_r$  à la fin de l'exécution des tâches est défini par :

$$C_{m_r} = \sum_{t_i \in \sigma_{m_r}} d_{m_r}(t_i)$$

où  $\sigma_{m_r}$  est l'ensemble de tâches exécutées par  $m_r$ .

Ce type de jeu est semblable aux jeux de congestion à choix unique tels que nous les avons présentés dans le chapitre 1. Dans cette section, les machines remplacent les biens (stratégies), et les tâches correspondent aux joueurs. Dans le cas où chaque tâche nécessite le même temps sur chaque machine, nous sommes dans un jeu de congestion à choix unique symétrique, dans le cas où le temps diffère d'une machine à l'autre, nous nous plaçons dans le cadre non symétrique de ce type de jeu.

Illustrons maintenant un jeu d'allocation avec deux machines ( $a$  et  $b$ ) et cinq tâches.



Les tâches sont représentées par les carrés de couleur, le nombre de carrés de chaque couleur indiquant le temps nécessaire d'exécution de la tâche correspondante. Les lettres  $a$  et  $b$ , au début de chaque ligne, indiquent sur quelle machine la tâche est effectuée. Ainsi, la tâche 1, qui ne nécessite qu'une seule unité de temps, est attribuée à la machine  $a$ , tandis que la tâche 4, qui nécessite 4 unités de temps, est attribuée à la machine  $b$ . Dans ce cas, la charge de la machine  $a$  correspond à 4 unités de temps (une unité de la tâche 1 et trois unités de la tâche 3), et la charge de la machine  $b$  est de 7 unités de temps (deux unités de la tâche 2, quatre unités de la tâche 4 et une unité de la tâche 5).

Nous pouvons résumer les utilités de chaque tâche dans les deux tableaux suivants :

machine $a$	
tâche	utilité
1	4
3	4

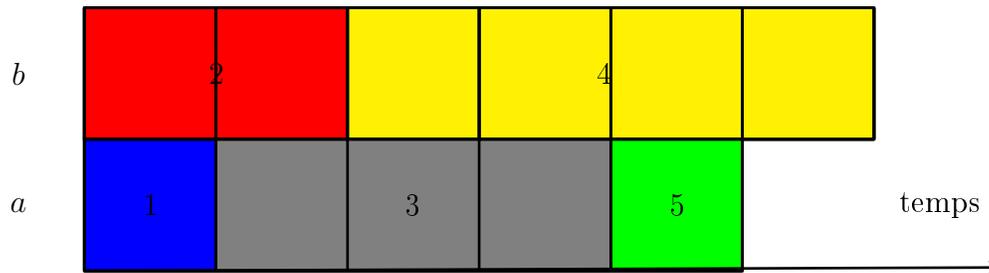
et

machine $b$	
tâche	utilité
2	7
4	7
5	7

Dans ce cas de figure, nous nous posons la question suivante : Une tâche peut-elle améliorer son utilité ?

Pour y répondre, il suffit de chercher l'équilibre de Nash dans ce type de jeu. Cet équilibre correspond au moment où il n'est plus rentable de faire passer une tâche d'une machine à une autre. Dans notre cas, par exemple, si on fait passer la tâche 5 sur la machine  $a$ , on obtient un équilibre de Nash.

Nous pouvons illustrer alors ce nouveau déplacement (tâche 5) selon la configuration suivante :



Les utilités de chaque tâche sont alors résumées dans les deux tableaux suivants :

machine <i>a</i>	
tâche	utilité
1	5
3	5
5	5

et

machine <i>b</i>	
tâche	utilité
2	6
4	6
5	6

En effet, la charge de la machine *a* sera de 5 et celle de la machine *b* sera de 6. Dans cette nouvelle situation, faire passer une tâche d'une machine à une autre n'est pas rentable. Pour simplifier, nous supposons que la charge de la machine correspond au coût de chaque tâche, et chaque tâche cherche à minimiser son coût : Elles ne bougeront plus lorsqu'elles seront en équilibre de Nash.

## 4.5 Application à l'allocation des tâches avec des machines différentes

Nous allons présenter dans cette section, deux cas d'application dans lesquels nous pouvons utiliser les jeux de congestion pour résoudre un problème d'allocation de tâches. Cependant, nous allons présenter ici des applications dans lesquelles les machines sont différentes. En effet, peu de travaux se sont intéressés à ce cas de figure. La plupart du temps, ce sont des cas où les tâches sont différentes, et les machines restent semblables. Nous allons donc analyser le problème d'allocation de tâches sous un angle différent.

### 4.5.1 Tâches identiques et machines différentes

Cette sous-section présente le cas où toutes les tâches sont identiques et où les machines sont différentes. Le problème est donc le suivant :

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , l'ensemble de tâches identiques ;
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$ , l'ensemble de machines différentes ;
- Le coût pour une tâche est l'inverse de l'utilité d'un joueur.

**Exemple 4.4.** Prenons un cas simple avec  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $R = \{a, b, c\}$ .

Les temps d'exécution en fonction de chaque machine sont les suivants :

- Machine  $a$  : le temps d'exécution d'une tâche est de 2 unités de temps.
- Machine  $b$  : le temps d'exécution d'une tâche est de 3 unités de temps.
- Machine  $c$  : le temps d'exécution d'une tâche est de 1 unité de temps.

Supposons que les temps d'exécution de chaque machine augmentent proportionnellement avec le nombre de tâches (c'est-à-dire, pour la machine  $a$  par exemple, exécuter deux tâches demandera 4 unités de temps et trois tâches demanderont 6 unités de temps et ainsi de suite). Nous pouvons résumer les

temps d'exécution de chaque machine dans le tableau suivant :

Nombre de tâchesMachines	$a$	$b$	$c$
1	2	3	1
2	4	6	2
3	6	9	3
4	8	12	4
5	10	15	5

D'après ce tableau, nous pouvons enchevêtrer les fonctions de coût de chaque machine (elles sont identiques pour toutes les tâches) dans l'ordre suivant :

$$5b \prec 4b \prec 5a \prec 3b \prec 4a \prec 3a \sim 2b \prec 5c \prec 2a \sim 4c \prec \underbrace{3c \sim b \prec 2c \sim a \prec c}.$$

la question qui se pose est celle relative à l'existence de l'équilibre de Nash de ce jeu. Pour résoudre ce problème, nous n'avons besoin que des cinq derniers termes de cette fonction. Bien que cette fonction comporte des égalités, il n'y a qu'une séquence de cinq derniers termes. Il s'agit de  $T = \{3c, b, 2c, a, c\}$ . En appliquant le théorème 2.3.1 du chapitre 2, on peut affirmer que l'équilibre de Nash de ce jeu est :  $\sigma = (a, b, 3c)$ .

Bien que nous n'ayons analysé qu'un simple cas, il est possible de trouver tous les équilibres de ce type de jeu quel que soit sa taille, c'est-à-dire, quel que soit le nombre de joueurs (tâches) et le nombre de machines. En effet, si on répartit mille tâches identiques sur cent machines, le problème reste le même et sa résolution est donc semblable. Nous commençons par définir la fonction

de coût, puis nous isolons la (les) séquence(s) des  $n$  derniers termes. Enfin, à partir de cette (ces) séquence(s), nous déterminons (les) équilibre(s) de Nash.

#### 4.5.2 Tâches différentes et machines différentes

Le problème que nous allons considérer à ce niveau est le même que celui que nous venons de voir. Cependant, la différence majeure existant est celle qui nous intéresse à présent, e.g, lorsque les tâches ne sont plus les mêmes. Le problème peut s'écrire comme suit :

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , l'ensemble de tâches différentes ;
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$ , l'ensemble de machines différentes ;
- Le coût pour une tâche est l'inverse de l'utilité d'un joueur.

**Exemple 4.5.** Nous allons considérer un simple cas dans lequel il n'y a que quatre machines et trois tâches. Les temps d'exécution de chaque tâche sont donnés dans le tableau ci-dessous en fonction de la machine à laquelle la tâche est affectée.

TâchesMachines	$a$	$b$	$c$	$d$
1	2	3	6	4
2	3	1	4	2
3	5	3	2	4

À priori, ce cas semble être en rapport direct avec le résultat théorique auquel nous sommes parvenus dans le chapitre 3, concernant les jeux de congestion à choix unique non symétrique avec quatre biens. En effet, en se penchant sur cette situation, il apparaît vite que les fonctions de coût pour chaque tâche

sont différentes en fonction des tâches affectées à leur machine. Ainsi, il apparaît facile d'établir un ordre de préférence et d'isoler une séquence de  $n$ -derniers termes.

$$d \prec b \prec a$$

$$a \prec d \prec b$$

$$d \prec b \prec c$$

Effectivement, d'après la proposition 3.4.3, le profil  $(a, b, c)$  est un équilibre de Nash de cet exemple.

Nous allons maintenant présenter dans la section suivante, deux modèles du prix de l'anarchie afin de les comparer, pour ensuite proposer un cas illustratif visant à vérifier que la méthode que nous avons décrite dans le chapitre 2 produit des résultats similaire à ceux prévus par ces deux modèles.

## 4.6 Prix de l'anarchie

Avant d'introduire la définition de prix de l'anarchie, nous allons imaginer le scénario suivant :

Comment trouver un équilibre dans un réseau routier où il y a un encombrement qui conduit à un retard au point d'arrivée ?

Afin de répondre à cette question, nous allons essentiellement consacrer notre analyse sur les deux modèles théoriques suivants.

### 4.6.1 Modèle de Pigou

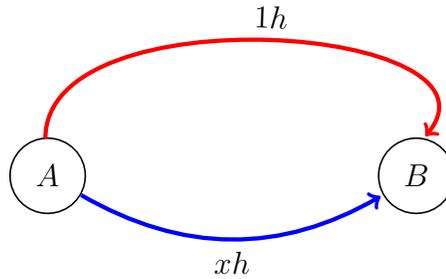
Du point de vue de Pigou (1920) dans le modèle de jeu de congestion réseau [55], il y a un système de communication régulé de manière centralisée, imposant des comportements à certains individus, pouvant circuler beaucoup mieux qu'un système dans lequel chacun peut choisir son comportement comme bon lui semble. Autrement dit, il y a un optimum social qui se trouve être (parfois) bien meilleur que l'optimum libéral, sachant que l'optimum social consiste à trouver un routage<sup>4</sup> pour lequel le temps total de transport est aussi petit que possible parmi tous les routages.

**Exemple 4.6.** Supposons que deux villes A et B soient reliées par deux routes. La première est "parfaite", très large, mais elle fait malheureusement un grand détour : il faut une heure pour la parcourir, et ceci, quel que soit le nombre de véhicules qui l'empruntent (dans des limites raisonnables, par exemple jusqu'à 1000 véhicules par heure). La seconde passe par un pont très étroit et très court, et on peut le parcourir en quelques instants à peine, à condition d'être seul sur le pont. Mais plus le nombre de personnes qui empruntent le pont augmente, plus la circulation devient encombrée, et plus le temps de passage augmente. Pour simplifier cette situation, supposons que si  $x$  milliers d'automobilistes/heure se présentent sur le pont, le temps de passage est de  $x$  heures. Par exemple, pour 300 véhicules/heure, c'est-à-dire, 0,3 milliers/heure, le temps de passage est de 0,3 heures, c'est-à-dire, 18 minutes.<sup>5</sup>

---

4. Un routage est un optimum égoïste si chacun y trouve son compte. En d'autres termes, c'est un routage qui a la propriété que si un automobiliste change d'itinéraire, sans que les autres en changent, son temps de transport personnel augmente.

5. Étienne Ghys, « Le prix-de-l'anarchie » Images des Mathématiques, CNRS, 2009



Supposons maintenant que 1000 automobilistes/heure souhaitent aller de  $A$  à  $B$ . On peut envisager deux comportements différents.

1. **Le comportement égoïste** : Chaque automobiliste choisit sa route comme il le souhaite. Ce scénario est clair : comme de toutes façons moins de 1000 véhicules/heure passent par le pont, on met moins d'une heure pour traverser le pont, et il est donc toujours préférable de prendre le pont plutôt que la route longue. Tout le monde optera pour le pont si bien que tout le monde mettra une heure pour aller de  $A$  à  $B$ .
2. **Le comportement social** : La municipalité, ou la police, peut "forcer" certains automobilistes à prendre telle ou telle route, par exemple, en fermant une barrière temporairement sur le pont. Supposons par exemple qu'on force la moitié des 1000 véhicules/heure à prendre la route la plus longue. Alors, 500 véhicules/heure mettront une heure pour parcourir la route longue mais les 500 autres prendront le pont et ne mettront que 30 minutes ( $\frac{500 \times 60}{1000}$ ). Le temps moyen de passage entre  $A$  et  $B$ , dans cette option « policière », est donc de 45 minutes ( $\frac{60 + 30}{2}$ ).

Comme on peut constater sur les deux comportements ci-dessus, le temps total d'un routage égoïste, notons-le  $T$ -égoïste, peut être supérieur au temps d'un routage social, notons-le  $T$ -social. On parle parfois d'équilibre de Nash ou de Wardrop pour ce que nous appelons ici un "routage égoïste".

De manière générale, le temps  $T$ -égoïste peut-il être supérieur au temps  $T$ -social? Pour répondre à cette question nous avons besoin de la définition suivante, introduite par Koutsoupias [38] et Papadimitriou [54].

**Définition 4.3.** *Le prix de l'anarchie* (noté  $PoA$ ) d'un jeu  $J$  est le rapport entre le temps  $T$ -égoïste du pire équilibre de Nash sur le temps  $T$ -social de l'équilibre de Nash optimum.

$$PoA(J) = \frac{W(E)}{OPT(J)}$$

où

- $W(E)$  représente le temps  $T$ -égoïste de l'état  $E$  du jeu ;
- $OPT(J)$  représente le temps  $T$  social (optimal) parmi toutes les configurations du jeu ;

Le théorème suivant permet d'estimer la valeur maximale de prix de l'anarchie.

**Théorème 4.6.1.** (*Roughgarden et Tardos [61]*).

*Dans un jeu de congestion réseau on a :  $PoA(J) \leq \frac{4}{3}$ .*

En d'autres termes, le prix de l'anarchie<sup>6</sup> consiste à mesurer la perte de performance (vis-à-vis d'une fonction objective globale) d'un système dans lequel les ressources sont allouées à des agents individualistes, dans le but d'analyser la qualité de la solution obtenue quand les agents se conduisent de façon individualiste. Il s'agit d'une analyse de la perte de performance due au comportement égoïste des agents (si le prix de l'anarchie est faible, un équilibre optimise quasiment la fonction objective globale).

---

6. Pour en savoir plus sur le prix d'anarchie, nous recommandons de lire l'ouvrage récent de Roughgarden [59] ou encore sa conférence au congrès international des mathématiciens, à Madrid en 2006 [60].

Notons qu'il existe une autre mesure qui correspond au prix de l'anarchie : le prix de la stabilité de Anshelevich et *al* [5], Schultz et Moses [68], défini comme le rapport entre le coût social du meilleur équilibre de Nash sur le coût social optimum. Elle mesure le gain sur le système global que l'on peut avoir si les acteurs ne cherchent pas à minimiser leur propre coût. Il y a une multitude de travaux sur ces deux prix. Notamment, les travaux de George Christodoulou et Elias Koutsoupias [15], ou encore d'autres travaux récents, qui étudient le prix de l'anarchie et le prix de la stabilité en tenant compte uniquement des équilibres, avec certaines propriétés, comme le Pareto optimal<sup>7</sup>.

#### 4.6.2 Modèle de paradoxe de Braess

Concernant le point de vue du modèle de paradoxe de Braess<sup>8</sup> [11], afin de trouver un équilibre, c'est-à-dire, de rendre la circulation plus fluide, il faut fermer certaines voies bien animées, comme le cas de New York city<sup>9</sup> qui était mis en évidence en 1968. Nous présentons un petit modèle qui explique le paradoxe de Braess :

Supposons que vous cherchez à vous déplacer d'une ville (A) à une autre (D) le plus vite possible. Deux itinéraires s'offrent à vous, l'un passant par B, l'autre passant par C. Chacun étant composé d'une route nationale et d'une route départementale. Le temps de parcours sur les nationales est de 45 mi-

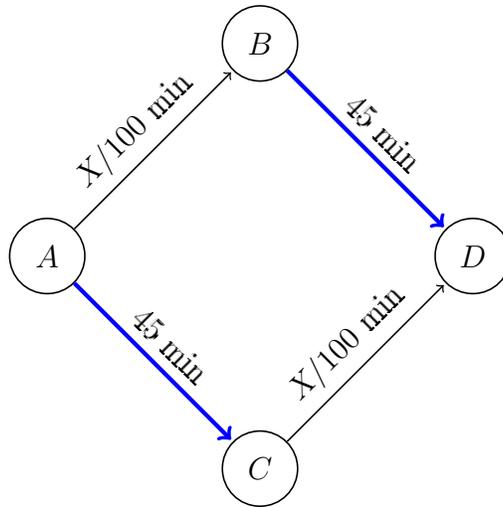
---

7. Voir l'article de Bilo et *al* [9] et Steve Chien et Alistair Sinclair [14].

8. Voir l'article de modèle de paradoxe de Braess en anglais dans [12].

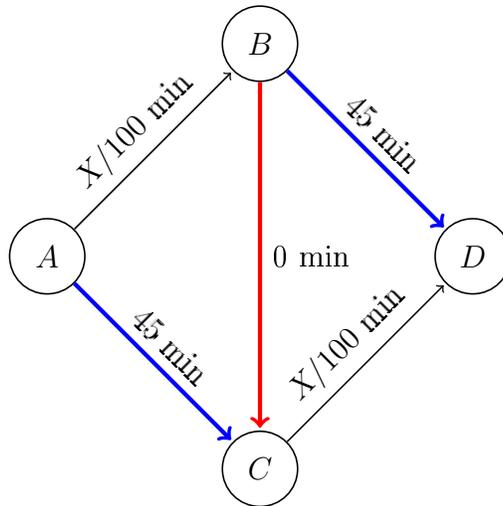
9. En 1990, à l'occasion de la "journée de la Terre", la municipalité de New York décida de fermer la 42-ème rue à la circulation. Cette rue étant l'une des plus animées de Manhattan, on pensait que cette fermeture ne manquerait pas de ralentir la circulation et de provoquer des embouteillages supplémentaires. C'est le contraire qui se passa : le fait de fermer la 42-ème rue rendit la circulation plus fluide! C'était l'une des premières fois où l'on voyait se réaliser "en vrai" un phénomène mis en évidence de manière théorique en 1968 par un universitaire allemand : le paradoxe de Braess.

minutes, quelle que soit la circulation. Par contre, comme il y a des feux sur les départementales, le temps de parcours dépend du nombre de voitures  $X$  qui l'emprunte : il vaut par exemple,  $X/100$  minutes.



Supposons qu'il y ait 4000 voitures souhaitant passer de A à D. Si elles prennent toutes le trajet du haut (ABD), elles mettront 85 minutes ( $4000/100 + 45 = 85$ ). De même, si elles prennent toutes le trajet du bas. La situation optimale sera celle où le trafic s'équilibre entre les deux trajets. Le temps de parcours sera alors de 65 minutes ( $45 + 2000/100 = 65$ ). Autrement dit, si  $X = 4000$ , nombre de voitures qui partent de A en direction de D. Elles ont intérêt à se répartir entre l'itinéraire du haut (ABD) et celui du bas (ACD) pour un temps de parcours 65 minutes.

Pour désengorger la circulation, on construit une voie ultra-rapide reliant B et C, dont le temps de parcours est négligeable quel que soit le nombre de véhicules qui l'empruntent. Avec cette voie rapide, le temps de parcours entre A et D devrait diminuer. Or, c'est l'inverse qui se produit :



En effet, le meilleur trajet pour les 4000 voitures est maintenant (ABCD) : départementale - voie rapide - départementale et le temps de trajet passe ainsi de 65 minutes à 80 minutes ( $4000/100 + 0 + 4000/100 = 80$ ). Et si une des voitures prenait un autre itinéraire, son trajet serait rallongé de 5 minutes ( $45+4000/100=85$ ). Bien que cette situation ne soit pas la meilleure, elle représente un équilibre de Nash parfaitement stable où personne n'a intérêt à changer de stratégie une fois qu'il connaît les choix des autres.

Si dans un monde utopique, la circulation s'établissait comme s'il n'y avait pas de voie rapide, et se répartissait comme avant, entre les deux itinéraires ABD et ACD, alors il n'est pas impossible qu'un petit malin puisse être tenté de gagner du temps en "coupant" par ABCD (son trajet ne lui prendrait que 40 minutes ( $2000/100 + 0 + 2000/100 = 40$ ) s'il était le seul à tricher). Il serait donc rapidement imité par d'autres..., et la situation dériverait assez vite jusqu'à ce que tout le monde prenne finalement le parcours ABCD et se retrouve avec un temps de parcours de 80 minutes. Voilà comment un choix

supplémentaire donné aux joueurs s'avère néfaste pour tout le monde, comme la route : "notre intelligence étant à l'origine de nos embouteillages".

Considérons les modèles précédents, on trouve que le prix de l'anarchie pour le modèle de Braess est de  $\frac{85}{65} \simeq 1,31$ . Dans l'exemple de Pigou, le temps social est de 45 minutes, et le temps égoïste est de 1 heure, c'est-à-dire,  $\frac{4}{3}$  de 45 minutes. L'exemple de Pigou est donc en un certain sens, le « pire » des cas possibles.

**Exemple 4.7.** Reprenons notre exemple 4.2, recherchons le prix de l'anarchie sur les coûts de trajet. Nous avons déjà calculé le coût global pour tous les équilibres de Nash :  $C_1^* = 8$ ,  $C_2^* = 9$  et  $C_3^* = 7$ . On a donc,

$$\begin{aligned} \text{le prix de l'anarchie} &= \frac{\text{coût (le pire équilibre de Nash)}}{\text{coût (l'équilibre optimal)}} \\ &= \frac{9}{7} \simeq 1,28 \end{aligned}$$

## 4.7 Conclusion

Ce dernier chapitre nous a essentiellement servi à mettre en évidence le large éventail d'applications des jeux de congestion. Nous avons présenté les jeux de réseaux qui permettent de modéliser et étudier un grand nombre de problèmes qui se posent dans des champs aussi variés tels que le trafic routier et l'informatique. Ces jeux de réseaux, dans leur forme générale, correspondent

plutôt à des jeux de congestion standard (avec possibilité, pour chaque joueur de choisir plusieurs biens à la fois), et non pas à des jeux à choix unique. c'est pour cette raison que nous n'avons pas pu proposer une application de nos résultats du chapitre 3 à cette famille de jeux. En revanche, nous avons pu appliquer notre méthode basée sur la recherche des  $n$ -séquences à la description de tous les équilibres de Nash (et à l'identification de l'équilibre optimal) dans les jeux de congestion réseau symétriques. Par ailleurs, nous avons également présenté une application des jeux de congestion à choix unique aux problèmes d'allocation de tâches. Pour ce type de problèmes, nous avons décrit les configurations les plus couramment étudiées, et nous avons, à nouveau, montrer comment utiliser notre propre méthode pour la détermination des équilibres de Nash.

# Conclusion générale

L'étude des jeux de congestion et de leurs applications construit aujourd'hui un champ de recherche très actif. Initié par les travaux de Rosenthal, de Konishi, Le Breton et Weber, et Milchtaich, ce domaine de recherche suscite toujours un intérêt majeur. Notre travail dans ce cadre s'est focalisé sur une classe particulière de jeux de congestion, à savoir les jeux de congestion à choix unique (symétriques ou non symétriques). L'objectif principal de cette étude était d'apporter une contribution à l'étude et à l'analyse des équilibres de Nash dans ces jeux. Certes, notre recherche ne prétend pas aborder tous les aspects du sujet, ni apporter de réponses définitives aux problématiques considérées. Nous avons néanmoins tenu à ne pas nous restreindre à une simple synthèse des travaux déjà existants. C'est pourquoi nous avons tenté d'apporter, dès que possible, des réponses originales aux différentes questions que nous nous sommes posées. Les apports de notre travail peuvent être résumés en trois points principaux :

Le premier apport concerne les jeux de congestion à choix unique symétriques. Cette classe de jeux constitue l'intersection entre la famille des jeux de congestion standards tels qu'ils ont été définis par Rosenthal [57], et celle des jeux de congestion avec fonctions de paiement spécifiques, introduits par Milchtaich [41]. En réexaminant les méthodes basées sur les preuves proposées

par ces deux auteurs, nous avons pu aboutir à une description, que l'on peut qualifier de précise et complète, de la structure de l'ensemble des équilibres de Nash. Notre approche était motivée par le fait que les méthodes classiques (faisant appel aux fonctions de potentiel ou aux mécanismes d'amélioration) conduisaient à l'identification d'un seul équilibre. Elles ne permettent pas de répondre à des questions telles que : le jeu admet-il un seul ou plusieurs équilibres ? Combien y a-t-il d'équilibres ? Lesquels ? Nous avons d'abord simplifié le cadre d'analyse, en ramenant le problème à l'étude d'une simple fonction d'utilité ordinale. Le passage au contexte ordinal nous a ensuite permis de restreindre l'analyse aux séquences des derniers termes de cette fonction. Une formule simple et pratique nous a alors permis de trouver la forme générale des équilibres et de les décrire de manière exhaustive. Le caractère utile de ce résultat a été illustré, à titre d'exemple, par la proposition d'un algorithme permettant d'identifier un équilibre de Nash en un temps linéaire et de dresser la liste de tous les équilibres. Pour cette classe de jeux, nous pensons avoir contribué significativement à l'amélioration (du moins sur le plan théorique) des techniques de calcul des équilibres de Nash, en les faisant passer de la recherche locale à la description totale.

Notre deuxième apport, a été obtenu par réexamen des résultats de Milchtaich [41] pour les jeux de congestion à choix unique non symétriques. Dans le cas simple de deux biens, là encore, notre analyse a été complète : description de tous les équilibres et proposition de formules permettant d'effectuer cette description. L'étude du cas général, nous a conduit à isoler une sous-classe de jeux de congestion que nous avons nommé "jeu de congestion à partition exacte", pour laquelle nous avons montré la possibilité d'atteindre tous les

équilibres. Cependant, nous n'avons malheureusement pas pu aller jusqu'au bout de notre approche dans le cas le plus général. En effet, il existe des jeux, à partition non exacte, où la méthode que nous proposons ne fonctionnait que pour montrer l'existence d'un seul équilibre (et pour l'exhiber). En revanche, nous avons pu présenter une preuve alternative à celle de Milchtaich, qui montre comment calculer plus facilement cet équilibre. Nos projets futurs dans cette littérature seront de considérer des jeux de congestions avec des choix multi-ressources et des joueurs différents (pas forcément la même fonction d'utilité).

Enfin, le dernier apport concerne l'application des approches proposées à la résolution de certains problèmes liés aux jeux de réseaux et aux jeux d'affectation de tâches. Ces jeux sont très utiles dans la modélisation de diverses situations de congestion dans les réseaux routiers ainsi que dans les champs économiques, écologique et informatique. Nous avons réussi à utiliser notre processus, fondé sur la recherche des  $n$ -séquences, à l'identification de tous les équilibres de Nash (ainsi que l'équilibre optimal) dans les jeux de congestion réseau symétriques. par ailleurs, nous avons aussi proposé une application des jeux de congestion à choix unique aux problèmes d'allocation de tâches, et appliqué à nouveau notre nouveau mécanisme pour la détermination des équilibres de Nash.

Bien que ces résultats apportent des réponses à certaines questions que nous nous sommes posées, un nombre de points sur lesquels il est nécessaire de poursuivre les recherches persiste. En effet, nous n'avons pas pu déterminer une méthode permettant de résoudre le cas où les fonctions d'utilité ne vérifient pas

la condition de partition exacte dans les jeux de congestion non symétriques.

Les résultats présentés dans cette étude ne sont valables que pour les jeux de congestion à choix unique. La recherche future qui y fait logiquement suivre est celle qui mettra en avant la question de l'identification de tous les équilibres de Nash dans le cas des jeux de congestion standards (où les joueurs ne sont pas restreints à un choix unique). C'est ce qui motivera nos projets de recherche pour les années futures.

# Bibliographie

- [1] H. Ackermann and H. Röglin. On the convergence time of the best response dynamics in player-specific congestion games. *Theoretical Computer Science*, pages 613–622, 2009.
- [2] H. Ackermann, H. Röglin, and B. Vöcking. On the impact of combinatorial structure on congestion games. *In : Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 410 :1552–1563, 2006.
- [3] H. Ackermann, H. Röglin, and B. Vöcking. Pure Nash equilibria in player-specific and weighted congestion games. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 50–61, 2006.
- [4] F. Allen and S. Morris. Finance applications of game theory. *In : Advances in Business Applications of Game Theory, by K. Chatterjee and W. Samuelson, Kluwer Academic Press*, pages 17–48, 2001.
- [5] E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. Kleinberg, É. Tardos, T. Wexler, and T. Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. *In : Proceedings of 45th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 295–304, 2004.
- [6] R.J. Aumann. Acceptable points in general cooperative n-person games. *In : Contributions to the Theory of Games, Annals of Mathematics Study 40, Princeton University Press*, 4 :287–324, 1959.
- [7] D.G. Baird, R.H. Gertner, and R.C. Picker. Game theory and the law. *Harvard University Press, Cambridge, Mass.*, 1994.

- [8] T. Basar and P. Bernhard.  $h^\infty$ -optimal control and relaxed minimax design problems. *A Dynamic Game Approach*. Birkhauser, Boston, MA, USA, 2nd edition, 1995.
- [9] V. Bilo, M. Flammini, G. Melideo, and L. Moscardelli. On Nash equilibria for multicast transmissions in ad-hoc wireless networks. *Kluwer Academic Publishers Hingham, MA, USA*, 14 :147–157, 2008.
- [10] L.D. Boèmont, M. Willinger, J.L. Rullière, S. Hammiche, A. Ziegelmeyer, M. Neveu, R. Petiot, K. Boun My, Y. Gabuthy, and K. Delvert. Les modèles structurels de congestion : une étude expérimentale. *Rapport final produit dans le cadre de la recherche portant sur les "Eléments des politiques de transport : une approche par l'économie expérimentale - Application au choix d'itinéraire" réalisée dans le cadre du programme PREDIT 1996-2000*, juin 2002.
- [11] D. Braess. Über ein paradoxon aus der verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12 :258–268, 1968.
- [12] D. Braess, A. Nagurney, and T. Wakolbinger. On a paradox of traffic planning. *Transportation Science*, 39 :446–450, 1968.
- [13] S.F. Cheng, D.M. Reeves, Y. Vorobeychik, and M.P. Wellaman. Notes on equilibria in symmetric games. *AAMAS-04, 6th Workshop on Game Theoretic and Decision*, New York City, NY, 08/2004.
- [14] S. Chien and A. Sinclair. Strong and Pareto price of anarchy in congestion games. *In : Proc. of the 36rd International Colloquium of Automata, Languages and Programming*, 2008.
- [15] G. Christodoulou and E. Koutsoupias. The price of anarchy of finite congestion games. *In : Proceedings of the 37th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 67–73, 2005.
- [16] G. Christodoulou, E. Koutsoupias, and A. Nanavati. Coordination mechanisms. *Theoretical Computer Science*, 410 :3327–3336, 2009.

- [17] A. Czumaj, P. Krysta, and B. Vökking. Selfish traffic allocation for server farms. *In : Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 287–296, 2002.
- [18] A. Czumaj and B. Vökking. Tight bounds for worst-case equilibria. *In : Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 413–420, 2002.
- [19] P. Dasgupta and E. Maskin. The existence of equilibrium in discontinuous economic games I : Theory. *Review of Economic Studies*, 53 :1–26, 1986.
- [20] G. Debreu. A social equilibrium existence theorem. *In : Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38 :886–893, 1952.
- [21] E. Even-Dar, A. Kesselman, and Y. Mansour. Convergence time to Nash equilibria. *In : Proceedings of the 30th Int. Coll. on Automata, Languages and Programming*, pages 502–513, 2003.
- [22] A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou, and K. Talwar. The complexity of pure Nash equilibria. *In : Proceedings of the 36th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 604–612, 2004.
- [23] G. Facchini, F. Van Meegen, P. Borm, and S. Tijs. Congestion models and weighted bayesian potential games. *International Game Theory Review*, 1 :283–299, 1999.
- [24] D. Fotakis, S. Kontogiannis, and P. Spirakis. Symmetry in network congestion games : Pure equilibria and anarchy cost. *In : Proceedings of the 3rd Workshop on Approximation and Online Algorithms*, pages 161–175, 2005.
- [25] D. Fotakis, S.C. Kontogiannis, E. Koutsoupias, M. Mavronicolas, and P.G. Spirakis. The structure and complexity of Nash equilibria for a selfish routing game. *In : Proceedings of the 29th Int. Coll. on Automata, Languages and Programming*, pages 123–134, 2002.

- [26] S. Fretwell and H.L. Lucas Jr. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds. *Acta Biotheoretica*, 19 :16–36, 1969.
- [27] I. Glicksberg. A further generalization of the kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points. *In : Proceedings of the American Mathematical Society*, 3 :170–174, 1952.
- [28] J.-G.J. Godin and M.H.A. Keenleyside. Foraging on patchily distributed prey by a cichlid fish (Teleostei, Cichlidae) : A test of the ideal free distribution theory. *Anim. Behav*, 32 :120–131, 1984.
- [29] D.G.C. Harper. Competitive foraging in mallards : Ideal free ducks. *Anim. Behav*, 30 :575–584, 1982.
- [30] R. Holzman and N. Law-Yone. Strong equilibrium in congestion games. *Games and Economic Behavior*, 21 :85–101, 1997.
- [31] S. Jeong, R. McGrew, E. Nudelman, Y. Shoham, and Q. Sun. Fast and compact : On a simple class of congestion games. *To appear in the 20th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*.
- [32] S. Jeong, R. McGrew, E. Nudelman, Y. Shoham, and Q. Sun. Fast and compact : A simple class of congestion games. *In : Proceedings of the 20th National Conference on Artificial Intelligence*, 2 :489–494, 2005.
- [33] S. Jorgensen and G. Zaccour. Differential games in marketing. *Kluwer Academic Publishers*, 2004.
- [34] M. Kandori, G.J. Mailath, and R. Rob. Learning, mutation, and long run equilibria in games. *Econometrica*, 61 :29–56, 1993.
- [35] H. Konishi, M. Le Breton, and S. Weber. Equilibrium in a model with partial rivalry. *Journal of Economic Theory*, 72 :225–237, 1997.
- [36] H. Konishi, M. Le Breton, and S. Weber. Pure strategy Nash equilibrium in a group formation game with positive externalities. *Games and Economic Behavior*, 21 :117–192, 1997b.

- [37] E. Koutsoupias, M. Mavronicolas, and P. Spirakis. Approximate equilibria and ball fusion. *ACM Transactions on Computer Systems*, 36 :683–693, 2003.
- [38] E. Koutsoupias and C.H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. *In : Proceedings of the 16th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, 1563 :404–413, 1999.
- [39] M. Mavronicolas and P. Spirakis. The price of selfish routing. *In : Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 510–519, Greece, 2001, ACM Press.
- [40] S. Maynard. Evolution and the theory of games. *Cambridge, UK : Cambridge Univ. Press*, page 63, 1982.
- [41] I. Milchtaich. Congestion games with player-specific payoff functions. *Games and Economic Behavior*, 13 :111–124, 1996.
- [42] I. Milchtaich. Generic uniqueness of equilibrium in large crowding games. *Mathematics of Operations Research*, 25 :349–364, 1998.
- [43] M. Milinsky. An evolutionary stable feeding strategy in sticklebacks. *Z. Tierpsychol*, 51 :36–40, 1979.
- [44] M. Milinsky. Competitive resource sharing : An experimental test of a learning rule for ESSs. *Anim. Behav*, 32 :233–242, 1984.
- [45] M. Milinsky and G.A. Parker. Competition for resources. *Behavioural Ecology*, 1991.
- [46] D. Monderer and L.S. Shapley. Potential games. *Unpublished Manuscript*, 1991.
- [47] D. Monderer and L.S. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14 :124–143, 1996.
- [48] J.D. Morrow. Game theory for political scientists. *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*, 1994.
- [49] J. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18 :155–162, 1950.

- [50] J. Nash. Equilibrium points in n-person games. *In : Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36 :48–49, 1951.
- [51] J. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 :286–295, 1951.
- [52] J. Von Neumann and O. Morgenstern. Theory of games and economic behavior. *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*, 1947.
- [53] A. Orda, N. Rom, and N. Shimkin. Competitive routing in multi-user communication networks. *IEEE/ACM Transaction on Networking*, 1 :614–627, 1993.
- [54] C.H. Papadimitriou. Algorithms, games, and the internet. *In : Proceedings of the 33rd ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 749–753, 2001.
- [55] A.C. Pigou. The economics of welfare. *Macmillan*, 1920.
- [56] T. Quint and M. Shubik. A model of migration. *Cowles Foundation DP 1088*, 1994.
- [57] R. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibrium. *International Journal of Game Theory*, 2 :65–67, 1973.
- [58] M.H. Rothkopf, A. Pekec, and R.M. Harstad. Computationally manageable combinatorial auctions. *Management Science*, 44(8) :1131–1147, 1998.
- [59] T. Roughgarden. Selfish routing and the price of anarchy. *MIT Press*, 2005.
- [60] T. Roughgarden. Potential functions and the inefficiency of equilibria. *(Survey) ICM*, 2006.
- [61] T. Roughgarden and E. Tardos. How bad is selfish routing? *Journal of the ACM*, 49(2) :236–259, 2002.
- [62] O. Rozenfeld and M. Tennenholtz. Strong and correlated strong equilibria in monotone congestion games. *In WINE*, pages 74–86, 2006.

- [63] T. Sandholm. Contract types for satisficing task allocation : I Theoretical results. *In : Proceedings of AAI 1998 Spring Symposium : Satisficing Models*, pages 68–75, 1998.
- [64] T. Sandholm. An algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. *In : Proceedings of IJCAI 99, Stockholm*, pages 542–547, 1999.
- [65] T. Sandholm. Emediator : A next generation electronic commerce server. *In : International Conference on Autonomous Agents*, Barcelona, Spain, june 2000.
- [66] T.C. Schelling. The strategy of conflict. *Cambridge, MA : Harvard University Press*, 1960.
- [67] A. Schrijver. Combinatorial optimization : Polyhedra and efficiency. *Springer*, B :39–69, 2003.
- [68] A.S. Schultz and N. Stier Moses. On the performance of user equilibria in traffic networks. *In : Proceedings of the 14th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 86–87, 2003.
- [69] O. Shehory and S. Kraus. Methods for task allocation via agent coalition formation. *Artificial Intelligence*, 101 :165–200, 1998.
- [70] O. Shehory and S. Kraus. Task allocation via coalition formation among autonomous agents. *In : Proceedings of IJCAI 95*, pages 655–661, Montreal, 1995.
- [71] M. Smith. Game theory and the evolution of fighting. *In John Maynard Smith, editor, On Evolution (Edinburgh University Press)*, pages 8–28, 1972.
- [72] M. Smith. Evolution and the theory of games. *Cambridge University Press, Cambridge, UK*, 1982.

- [73] W.G. Sutherland, C.R Townsend, and J.M. Patmore. A test of the ideal free distribution with unequal competitors. *Behav. Ecol. Sociobiol*, 23 :51–53, 1988.
- [74] A. Tucker. A two-person dilemma. *Mimeo, Stanford University, 1950*.
- [75] M. Voorneveld, P. Borm, F. Megen, S. van Tijs, and G. Facchini. Congestion games and potentials reconsidered. *International Game Theory Review*, 1(3) :283–299, 1999.
- [76] J.G. Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research communication networks. *Proc. Inst. Civ. Eng., Part 2*, 1 :325–378, 1952.
- [77] M.H. Wooders. A tiebout theorem. *Mathematical Social Sciences*, 18 :33–55, 1989.
- [78] H.P. Young. The evolution of conventions. *Econometrica*, 61 :57–84, 1993.